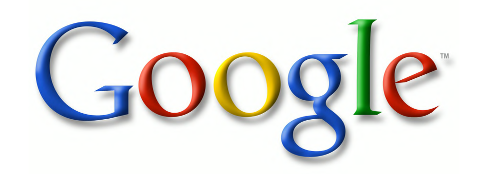
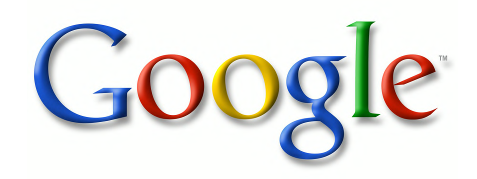





Stanford University Libraries
3 6105 027 650 253


1 C25

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ,

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DE LA MUNICIPALITÉ DE TOULOUSE,

AVEC LE CONCOURS

DU CONSEIL GÉNÉRAL DE LA HAUTE-GARONNE.

TOME IX. – ANNÉE 1895.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

Le 31 décembre 1894 est mort, à trente-huit ans, après une longue maladie, Thomas-Jean Stieltjes, professeur de Calcul différentiel et intégral à la Faculté des Sciences de Toulouse. Un des membres du Comité des *Annales*, M. E. Cosserat, a bien voulu analyser 82 Notes ou Mémoires publiés par Stieltjes dans divers Recueils et en a fait précéder l'analyse d'une Notice biographique. Le Comité a pensé que la publication de cette analyse était le meilleur hommage qu'il pût rendre immédiatement à la mémoire de l'un des hommes dont le caractère et le talent ont fait le plus d'honneur à la Faculté.

Stieltjes a laissé peu de manuscrits inédits, en dehors de sa correspondance avec le plus illustre de nos maîtres, M. Ch. Hermite, dont les encouragements et la constante amitié ont été, pour Stieltjes et pour les siens, d'un si haut prix. Le Comité recherchera attentivement, tant dans cette correspondance que dans les autres écrits de Stieltjes, ce qu'il y aura lieu de publier. Tout d'abord il a paru qu'il y aurait grand intérêt à réimprimer en langue française, dans ces *Annales*, les Mémoires publiés par Stieltjes en Hollande, avant son arrivée en France. Nous remercions ici notre collègue, M. E. Cosserat, qui a bien voulu se charger de ce travail, et les Corps savants hollandais qui ont autorisé cette réimpression que nous espérons commencer prochainement.

LE COMITÉ.

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

THOMAS-JEAN STIELTJES,

PAR M. E. COSSERAT,

Chargé d'un Cours de Calcul différentiel et intégral à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Stieltjes, dont la Science déplore la mort prématurée, est né en Hollande, à Zwolle, le 29 décembre 1856. Fils d'un Ingénieur distingué, dont le nom reste attaché à un grand nombre de travaux remarquables, tels que le desséchement du lac de Harlem, la construction du port actuel de Rotterdam, pour ne citer, peut-être, que les moins importants, il suivit les cours de l'École Polytechnique de Delft; mais, entraîné par son goût pour les Sciences exactes, il entra, le 1er décembre 1877, à l'observatoire de Leyde, où il se consacra, pendant six ans, à une étude approfondie de l'Astronomie. La publication prochaine des observations faites dans cette période, à Leyde, montrera la part active que Stieltjes prit aux travaux de l'observatoire. Il se livrait, en même temps, à des recherches théoriques, dont les résultats sont devenus classiques ([1]). Le 1er décembre 1883, il quitta l'observatoire en vue d'obtenir une chaire de Mathématiques, à l'Université de Groningue; la haute estime, dans laquelle ses travaux étaient tenus en Hollande, lui fit conférer, en 1884, par l'Université de

([1]) Nous devons le renseignement suivant à l'extrême obligeance de M. F. van de Sande Bakhuysen, astronome à l'observatoire de Leyde. En 1882, Stieltjes communiqua à M. Tisserand son élégante démonstration du théorème de l'éminent astronome sur le développement de la fonction perturbatrice lorsque l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable; M. Tisserand était alors en mission à la Martinique pour l'observation du passage de Vénus; la Communication de Stieltjes fut transmise à M. Hermite et c'est à partir de ce moment que s'établirent les liens d'amitié qui l'ont uni jusqu'à sa mort à l'illustre géomètre.

Leyde, le grade de Docteur *honoris causa,* et le fit élire, en 1885, Membre de l'Académie royale des Sciences d'Amsterdam; la chaire qu'il désirait ne lui fut cependant pas accordée et il vint habiter Paris, où il obtint, en juin 1886, le grade de Docteur ès Sciences mathématiques. La même année, il était appelé à la Faculté des Sciences de Toulouse, et la période la plus féconde de sa vie scientifique commença.

Pour faire connaître, de la façon la plus complète, la valeur de cet homme éminent, nous avons rassemblé ici tous ses travaux ([1]); nous nous sommes efforcé de rendre ainsi à Stieltjes tout l'hommage qui lui est dû et de lui témoigner la profonde reconnaissance que nous avons pour la constante amitié dont il nous a honoré.

L'ordre chronologique suivi dans cette Notice pourrait se justifier de bien des manières; mais nous l'avons adopté surtout afin de mieux mettre en évidence les progrès que Stieltjes a fait faire successivement aux sujets qu'il a traités; il se plaisait lui-même à faire remarquer que le Mémoire : *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques,* publié en 1884, peut être considéré ([2]) comme l'origine de son travail : *Recherches sur les fractions continues,* qui a donné lieu à un rapport de M. Poincaré ([3]), dont nous extrayons le passage suivant :

Le travail de M. Stieltjes est donc un des plus remarquables Mémoires d'Analyse qui aient été écrits dans ces dernières années; il s'ajoute à beaucoup d'autres qui ont placé leur auteur à un rang éminent dans la Science de notre époque. La plus grande clarté et l'élégance de la forme analytique, qu'on remarque dans le Mémoire dont nous venons de rendre compte, se joignent au talent de l'invention dans toutes les recherches qui ont pour objet d'importantes et difficiles questions, comme la variation de la densité à l'intérieur de la Terre, les séries

---

([1]) Le Mémoire de M. Poincaré *Sur les résidus des intégrales doubles* (*Acta mathematica,* t. IX, p. 329; 1887) renferme des indications sur un travail inédit de Stieltjes; consulter la page 323 de ce Mémoire et le § 5 intitulé : *Méthode de M. Stieltjes.*

([2]) Comme confirmation de ce point, on pourra lire, plus loin, les analyses des deux Notes portant le titre commun *Sur un développement en fraction continue* (n°s 32 et 67).

([3]) On trouvera le rapport de M. Poincaré au tome CXIX des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, p. 630. Déjà, en 1892, la Section de Géométrie avait porté Stieltjes sur la liste des candidats présentés pour remplacer Ossian Bonnet à l'Académie des Sciences, et, en 1893, il avait obtenu le prix Petit d'Ormoy. Tout récemment il venait d'être nommé Membre correspondant de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg.

semi-convergentes, la théorie des polynomes de Legendre, de la fonction Γ, *etc. La Commission a l'honneur de proposer à l'Académie d'accorder à M. Stieltjes le plus haut témoignage de son approbation en ordonnant l'insertion de son Mémoire :* Sur les fractions continues, *dans le* Recueil des Savants étrangers, *et elle émet le vœu qu'un prix puisse lui être accordé sur la fondation Lecomte.*

1. *Iets over de benaderde voorstelling van eene functie door eene andere* (¹) (Delft, 1876).

Soient $f(x)$ et $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ deux fonctions de x continues dans l'intervalle (a, b); déterminons les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de façon que, pour

$$x = x_1, x_2, \ldots, x_n \quad (a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b)$$

la fonction $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ prenne les mêmes valeurs que $f(x)$; on voit que si, pour une valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b), on adopte, pour valeur de $f(x)$, la valeur correspondante de $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, on commet une erreur

$$f(x) - \varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

déterminant, lorsque x varie, une fonction continue $R(x)$ qui s'annule pour $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Supposant que la fonction $R(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b) pour d'autres valeurs que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et qu'elle change, en général, de signe, lorsque x franchit l'une de ces valeurs, Stieltjes introduit ce qu'il appelle l'*écart* des deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dans le même intervalle, à savoir la somme de toutes les aires comprises entre l'axe des x, la courbe $y = R(x)$ et les deux ordonnées extrêmes $x = a$, $x = b$, toutes ces aires devant être prises en valeur absolue. Cette définition posée, il se propose de déterminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de façon que cet écart soit minimum.

Le cas où la fonction $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est de la forme

$$\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x),$$

linéaire par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_n$, est particulièrement intéressant; les

(¹) M. F. van de Sande Bakhuysen nous a signalé que ce Mémoire, dont les résultats avaient été obtenus dès 1875, fut publié en 1876, par le père de Stieltjes et à l'insu de ce dernier.

nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont alors déterminés par les n équations

$$(1)\quad \int_0^{x_1} \varphi_p(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} \varphi_p(x)\,dx + \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{b} \varphi_p(x)\,dx = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

et sont, par suite, *indépendants de* $f(x)$.

Stieltjes examine, en particulier, le cas où l'on a

$$a = -1, \qquad b = +1,$$
$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = x^2, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = x^{n-1},$$

c'est-à-dire le cas où il s'agit de représenter approximativement, dans l'intervalle $(-1, +1)$, et, avec l'écart minimum, la fonction $f(x)$ par un polynome entier du degré $n-1$; les équations (1) sont alors vérifiées par les valeurs

$$x_1 = \cos\frac{n\pi}{n+1}, \quad x_2 = \cos\frac{(n-1)\pi}{n+1}, \quad \ldots, \quad x_p = \cos\frac{(n-p+1)\pi}{n+1}, \quad \ldots, \quad x_n = \cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Le cas où l'on veut, pour $0 < x < \pi$, représenter approximativement $f(x)$ par

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx,$$

est ensuite considéré et se rattache à des recherches de Lagrange.

2. *Een en ander over de integraal* $\int_0^1 l\Gamma(x+u)\,du$ (Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IV, p. 100-104; 1878).

La définition habituelle de l'intégrale définie permet, lorsqu'on se donne la fonction à intégrer et les limites de l'intégrale, d'obtenir des valeurs approchées de l'intégrale définie, mais ce n'est que dans des cas très particuliers qu'elle fournit la valeur exacte de cette intégrale. Des exemples [1] de pareils cas sont ici mis en évidence par Stieltjes, qui établit ainsi les

---

[1] Pour un autre exemple, on peut consulter TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 285. Dans son cours à la Faculté des Sciences de Toulouse, Stieltjes traitait l'exemple simple, consistant à déterminer $\int_a^b x^m\,dx$, en intercalant entre a et b des moyens formant constamment une progression géométrique.

formules de Raabe :

$$\int_0^1 \log\Gamma(u)\,du = \tfrac{1}{2}\log 2\pi, \tag{1}$$

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+u)\,du = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + x\log x - x. \tag{2}$$

Remarquant ensuite que la formule (2) entraîne la suivante

$$\int_0^1 \Psi(x+u)\,du = \log x, \tag{3}$$

où l'on a posé

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx}\log\Gamma(x),$$

il est ainsi amené à la considération d'une fonction $\Psi(x, p)$ définie, pour $p > 0$, $x > 0$, en posant

$$\Psi(x, p) = \lim_{n=\infty}\left[\frac{n^{1-p}-1}{1-p} - \frac{1}{x^p} - \frac{1}{(x+1)^p} - \ldots - \frac{1}{(x+n-1)^p}\right],$$

et qui, pour $p = 1$, se réduit à la fonction désignée précédemment par $\Psi(x)$.

Stieltjes montre que la définition de l'intégrale définie conduit encore directement à la formule

$$\int_0^1 \Psi(x+u, p)\,du = \frac{x^{1-p}-1}{1-p} \qquad (x > 0,\ 0 < p < 1)$$

qui, pour $p = 1$, doit être remplacée par la formule (3).

3. *Notiz über einen elementaren Algorithmus* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXXIX, p. 343-344; 1880).

Les propositions indiquées dans cette Note sont développées et complétées dans le Mémoire : *Over een algorithmus voor het meetkunding midden,* que l'on trouvera plus loin (n° 8).

4. *Over Lagrange's interpolatie-formule* (Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 2e série, t. XVII, p. 239-254; 1882).

La formule de Lagrange fait connaître, comme on sait, le polynome entier $F(x)$, dont le degré est au plus $n-1$ et qui, pour les n valeurs

particulières $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, coïncide avec une fonction donnée $f(x)$, sous la forme suivante

$$(1) \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\Psi(x)}{(x - x_p)\Psi'(x_p)} f(x_p),$$

où

$$\Psi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

M. Hermite a donné l'expression analytique de la différence $f(x) - \mathrm{F}(x)$ sous forme d'intégrale définie; l'éminent géomètre, se plaçant dans un cas plus général, envisage (¹) un polynome entier $\mathrm{H}(x)$, de degré

$$k - 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 1,$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} \mathrm{H}(x_1) = f(x_1), & \mathrm{H}'(x_1) = f'(x_1), & \ldots, & \mathrm{H}^{\alpha_1 - 1}(x_1) = f^{\alpha_1 - 1}(x_1), \\ \mathrm{H}(x_2) = f(x_2), & \mathrm{H}'(x_2) = f'(x_2), & \ldots, & \mathrm{H}^{\alpha_2 - 1}(x_2) = f^{\alpha_2 - 1}(x_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{H}(x_n) = f(x_n), & \mathrm{H}'(x_n) = f'(x_n), & \ldots, & \mathrm{H}^{\alpha_n - 1}(x_n) = f^{\alpha_n - 1}(x_n), \end{cases}$$

où $f(x)$ désigne toujours la fonction donnée, et parvient à deux représentations distinctes de la différence $f(x) - \mathrm{H}(x)$, l'une sous forme d'intégrale curviligne, l'autre sous forme d'intégrale multiple; la série de Taylor et la formule d'interpolation de Lagrange sont ainsi rattachées à un même point de vue.

Stieltjes remarque que, de même qu'on peut déduire de l'intégrale définie qui représente le reste de la série de Taylor la forme du reste de Lagrange, on peut de même déduire, de l'intégrale multiple introduite, comme il vient d'être dit, par M. Hermite, une forme de reste correspondante. Cette remarque faite, il se propose de parvenir à l'expression du reste en question sans avoir recours au Calcul intégral.

Se plaçant d'abord dans le cas de la formule même d'interpolation de Lagrange, Stieltjes établit que l'on a

$$(3) \qquad f(x) = \mathrm{F}(x) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{1.2.3\ldots n} f^n(\xi),$$

(¹) Ch. Hermite, *Sur la formule d'interpolation de Lagrange* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXXXIV, p. 70; 1878).

c'est-à-dire

$$\frac{f(x)}{\varphi'(x)}+\frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)}+\frac{f(x_2)}{\varphi'(x_2)}+\ldots+\frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)}=\frac{1}{1.2\ldots n}f^n(\xi),$$

en posant

$$\varphi(z)=(z-x)(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n).$$

ξ désigne un nombre compris entre la plus petite et la plus grande des quantités $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et la fonction $f(z)$ est supposée admettre des dérivées $f'(z), \ldots, f^n(z)$ pour toutes les valeurs de z comprises entre la plus petite et la plus grande des quantités $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La démonstration de la formule (3) repose sur le lemme suivant :

Si $G(z)$ *est une fonction qui s'annule pour les* $n+1$ *valeurs distinctes* $z=x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ *et qui admet des dérivées successives* $G'(z), \ldots, G^n(z)$, *cette dernière dérivée* $G^n(z)$ *s'annule pour une valeur* $z=\xi$, *comprise entre le plus petit et le plus grand des nombres* $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si l'on suppose maintenant que la fonction $f^n(z)$ est continue pour la valeur particulière $z=X$ et si l'on fait tendre $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ vers X, on voit que l'on a la définition suivante de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(z)$ pour $z=X$:

$$f^n(X)=1.2.3\ldots n\times\lim\left[\frac{f(x)}{\varphi'(x)}+\frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)}\right].$$

Stieltjes montre ensuite la grande analogie de la formule (3) avec le théorème de Taylor, en introduisant la forme donnée par Newton du polynome $F(x)$. Ceci le conduit à envisager le cas où plusieurs des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tendent vers une même limite et l'amène au polynome $H(x)$ de M. Hermite, défini par les relations (2). Généralisant le lemme employé précédemment, il parvient à la formule

$$f(x)=H(x)+\frac{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}}{1.2.3\ldots k}f^k(\xi),$$

où ξ est compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et où $f(x)$ est supposée avoir k dérivées successives.

Généralisant encore le résultant précédent, il établit enfin la formule suivante. Gardant pour $f(x)$ et $H(x)$ la même définition, soient $f_1(x)$

une nouvelle fonction de x et $H_1(x)$ la fonction analogue à $H(x)$, qui lui correspond et qui serait définie par les relations (2) où l'on remplacerait f, H par f_1, H_1. On a alors

$$f(x) = H(x) + [f_1(x) - H_1(x)] \frac{f^k(\xi)}{f_1^k(\xi)},$$

où ξ a toujours la même signification.

Un supplément annexé au Mémoire précédent est consacré à la démonstration de l'existence unique du polynome $H(x)$, du degré $k - 1$ au plus, satisfaisant aux conditions (2).

5. *Eenige bemerkingen omtrent de differentiaalquotienten van eene functie van eene veranderlijke* (Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IX, p. 106-111; 1882).

Si une fonction $f(x)$ est définie et admet une dérivée dans un intervalle comprenant deux nombres a, b, on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \qquad (a < \xi < b).$$

Si a et b tendent vers une même limite X et si $f'(x)$ est continue pour $x = X$, on en déduit

$$(1) \qquad f'(X) = \lim \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Stieltjes remarque que si a et b tendent vers leur limite X, de telle façon que X appartienne toujours à l'intervalle (a, b), la formule (1) résulte simplement de l'existence de $f'(X)$.

Revenant ensuite à la formule

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} f^n(X) = \lim \left[\frac{f(x)}{\varphi'(x)} + \frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \ldots + \frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)} \right]$$

établie dans le Mémoire précédent : *Over Lagrange's interpolatie formule*, en supposant que $f^n(z)$ soit continue pour $z = X$, il montre qu'elle est encore vraie, lorsqu'on suppose simplement l'existence de $f^n(X)$, pourvu que X appartienne toujours à l'intervalle formé par la plus petite et par la plus grande des quantités $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

6. *Over eenige theoremas omtrent oneindige reeksen* (Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IX, p. 98-106; 1882).

Stieltjes, généralisant une proposition de M. Frobenius (¹), énonce le théorème suivant :

Si u est positif, les expressions

$$(1-x)^u\left[s_0+\frac{u}{1}s_1x+\frac{u(u+1)}{1.2}s_2x^2+\frac{u(u+1)(u+2)}{1.2.3}s_3x^3+\ldots\right]$$

et

$$\frac{s_1x+\frac{1}{2}s_2x^2+\frac{1}{3}s_3x^3+\frac{1}{4}s_4x^4+\ldots}{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)},$$

où s_n varie avec n, ont, lorsque x tend en croissant vers 1, *la même limite que*

$$\frac{s_0+s_1+\ldots+s_{n-1}}{n},$$

pour n croissant indéfiniment.

Se plaçant d'abord dans le cas où s_n a une limite, lorsque n croît indéfiniment, Stieltjes établit la proposition suivante, qui comprend alors le théorème qu'il s'agit de démontrer :

Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots$ des nombres qui ne sont pas négatifs et supposons que la série

$$\Psi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

soit convergente pour $0<x<1$, mais soit divergente pour $x=1$; la série

$$f(x)=a_0s_0+a_1s_1x+a_2s_2x^2+\ldots$$

est également convergente pour $0<x<1$ et le rapport

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

lorsque x tend vers 1 en croissant constamment, a pour limite le nombre vers lequel tend s_n.

Après avoir, comme application de ce qui précède, retrouvé des résultats

(¹) G. Frobenius, *Ueber die Leibnitzsche Reihe* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXXXIX, p. 262-264; 1880).

établis par Gauss et relatifs à la série hypergéométrique, Stieltjes en indique une généralisation et revient ensuite à la démonstration du théorème énoncé en premier lieu, pour laquelle il lui suffit de suivre le raisonnement fait par M. Frobenius dans le cas particulier déjà cité.

7. *Over de transformatie van de periodieke functie*

$$A_0 + A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

(Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IX, p. 111-116; 1882).

La décomposition en facteurs d'une expression de la forme précédente où les coefficients A_k, B_k sont réels a été considérée par Hansen; Stieltjes se propose ici d'établir un ensemble concis de formules nécessaires pour cette réduction.

8. *Over een algorithmus voor het meetkunding midden* (Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IX, p. 198-211; 1882).

Ce Mémoire, qui constitue le développement de la Note *Notiz über einen elementaren Algorithmus* (n° 3), est consacré à l'étude du mode de calcul suivant, par lequel on déduit de k nombres donnés a_1, a_2, ... a_k, k nouveaux nombres $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ dont le produit est égal au produit des k premiers. Soient :

M_1 la moyenne arithmétique de $a_1, a_2, \ldots, a_k$;
M_2 la moyenne arithmétique de tous les produits formés avec deux de ces nombres;
M_3 la moyenne arithmétique de tous les produits formés de trois de ces nombres, etc.;

le dernier nombre ainsi formé est $M_k = a_1 a_2 \ldots a_k$; soit de plus $M_0 = 1$; on a alors, pour définir les nombres $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$, les formules

$$a'_p = \frac{M_p}{M_{p-1}} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots, k).$$

Stieltjes donne d'abord une démonstration de cette proposition connue que, si $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont réels, l'expression

$$M_p^2 - M_{p-1} M_{p+1},$$

où p peut prendre l'une des valeurs $1, 2, \ldots, k-1$, n'est jamais négative et s'annule seulement, soit lorsque tous les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont égaux, soit lorsque $k-p+1$ au moins de ces nombres sont nuls.

Supposant ensuite que $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont réels et *tous positifs*, il établit que l'on a

$$a'_1 a'_2 \ldots a'_k = a_1 a_2 \ldots a_k,$$

$$a_1 > a'_1 > a'_2 > \ldots > a'_k > a_k,$$

$$0 < a'_1 - a'_k < \frac{k-1}{k}(a_1 - a_k),$$

en désignant par a_k et $a_1 (a_k < a_1)$ les limites de l'intervalle qui comprend tous les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

L'application répétée de l'opération par laquelle les nombres $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ sont déduits de $a_1, a_2, \ldots, a_k$ conduit ainsi à des groupes successifs de k nombres positifs; les nombres d'un même groupe ont un produit invariable, ils se rapprochent indéfiniment les uns des autres et tendent par suite vers une limite commune égale à la moyenne géométrique de $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Stieltjes démontre de plus que si l'on désigne les nombres du $n^{\text{ième}}$ groupe dérivé par

$$a_p^{(n)} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

les $k-1$ différences

$$a_p^{(n)} - a_{p+1}^{(n)},$$

qui tendent vers zéro, ont des rapports mutuels qui tendent vers l'unité lorsque n croît indéfiniment.

Stieltjes termine en remarquant que si $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ont des valeurs complexes, il est facile d'indiquer des conditions dans lesquelles le procédé de calcul conduit à des nombres ayant une limite, mais il lui semble difficile de conclure, dans le cas général, à l'existence de cette limite. Le cas de $k = 2$ est le seul qui ne présente pas de difficulté; il conduit Stieltjes à une série rentrant dans celles, considérées d'abord (¹) par MM. Weierstrass et Tannery, dont les termes sont des fonctions rationnelles d'une variable z et qui possèdent la propriété d'avoir pour valeur $+1$ ou -1, selon que la partie réelle de z est positive ou négative.

(¹) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. V, Iʳᵉ Partie, p. 157, 181; avril 1881.

9. *Over het quadratische rest-karakter van het getal* 2 (Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IX, p. 193-195; 1882).

Étude du caractère du nombre 2 comme résidu ou non résidu quadratique.

10. *Bijdrage tot de theorie der derde-en vierde-machtsresten* (Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 2e série, t. XVII, p. 338-417; 1882).

Une reproduction en français de ce Mémoire a paru ultérieurement et sera analysée plus loin (n° 15).

11. *Sur un théorème de M. Tisserand* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCV, p. 901-903, 13 novembre 1882).

Cette Note, qui renferme une démonstration élégante et une généralisation d'un théorème de M. Tisserand, est développée dans le Mémoire (n° 65) que l'on trouvera plus loin.

12. *Sur un théorème de M. Tisserand* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCV, p. 1043-1044; 27 novembre 1882).

Stieltjes généralise la formule donnée dans la Communication précédente en introduisant les fonctions sphériques, d'ordre p, de M. Heine.

13. *Bewijs van de stelling, dat een geheele rationale functie altijd, voor zekere reële of complexe waarden van de veranderlijke, de waarde nul aanneemt* (Nieuw Archief voor Wiskunde, t. IX, p. 196-197; 1882).

Stieltjes indique ici une démonstration du théorème de d'Alembert qui présente une certaine analogie avec l'une des démonstrations de Gauss, mais en diffère essentiellement par la façon dont on termine le raisonnement.

$f(z)$ désignant un polynome entier du degré n, soit

$$f(x+yi) = u + vi;$$

les polynomes entiers u et v en x et y, à coefficients réels jouissent de cette propriété que, aussi grand que soit donné un nombre positif A, on peut déterminer un nombre positif R assez grand pour que, pour toutes les

valeurs de $z = x + yi$ dont le module est supérieur ou égal à R, le module de $u + vi$ soit plus grand que A. Sans s'arrêter à la démonstration de cette propriété, Stieltjes remarque qu'il s'agit d'établir l'existence de valeurs réelles de x et y qui satisfont simultanément aux relations

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

et que si de telles valeurs n'existaient pas, la fonction $w = \log(u^2 + v^2)$ de x et y serait définie et continue pour toutes les valeurs de x et y ainsi que ses dérivées partielles de tous les ordres par rapport à x et y.

Or, la fonction w satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

sa valeur en un point (x_0, y_0) est donnée par la formule

$$w(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi)\,d\varphi;$$

ceci conduit immédiatement à une contradiction puisque, d'après la proposition admise précédemment, on peut supposer R assez grand pour que $w(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi)$ soit, pour toutes les valeurs de φ, plus grand qu'un nombre choisi arbitrairement.

14. *Quelques considérations sur la fonction rationnelle entière d'une variable complexe* (Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, t. XVIII, p. 1-21; 1883).

Dans la démonstration de Cauchy du théorème de d'Alembert, on établit que le module d'un polynome entier $f(z)$ n'admet pas de minimum différent de zéro et il est clair que le raisonnement employé prouve également la non-existence d'un maximum pour le module considéré. En d'autres termes, on peut énoncer la proposition suivante : étant donnés dans un plan n points fixes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et, en outre, un point variable z, le produit des distances de z à $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne prend jamais une valeur maximum ou minimum, sauf lorsque le point z coïncide avec un des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Cette remarque faite, Stieltjes reprend la démonstration de la proposition précédente sans s'occuper de sa relation avec la théorie des équations

algébriques. Il est conduit au résultat suivant : les points multiples des courbes pour lesquelles on a $\operatorname{mod} f(z) = C$, C prenant des valeurs constantes, coïncident avec les points dont les affixes sont les racines de $f'(z) = 0$; c'est seulement pour des valeurs particulières de C, en nombre tout au plus égal à $n - 1$, que la courbe $\operatorname{mod} f(z) = C$ a de pareils points multiples.

L'allure des courbes

$$\operatorname{mod} f(z) = C$$

résulte aussi de ce qui précède; une telle courbe peut être considérée comme la limite du domaine où $f(z)$ est moindre que C; ce domaine renferme, à son intérieur, au moins une des racines de $f(z) = 0$; pour des valeurs suffisamment petites de C, il se compose de pièces continues entièrement isolées les unes des autres, dont chacune renferme une des racines de $f(z) = 0$, de sorte que la courbe $\operatorname{mod} f(z) = C$ consiste en courbes fermées qui entourent ces racines. Si C croît, chacune des pièces continues précédentes s'étend et, au moment où C dépasse la plus petite des valeurs de $\operatorname{mod} f(z)$ correspondant aux racines de $f'(z) = 0$ qui n'annulent pas $f(z)$, deux ou plusieurs pièces séparées du domaine $\operatorname{mod} f(z) \leqq C$ se réunissent; il en est de même pour chacune des racines de $f'(z) = 0$ qui n'annulent pas $f(z)$, et, finalement, on arrive à une courbe fermée unique qui entoure toutes les racines de $f(z) = 0$.

Après avoir appliqué ce qui précède à l'exemple suivant

$$f(z) = z^4 + z^3 - 2,$$

Stieltjes revient à la courbe

$$\operatorname{mod} f(z) = C$$

pour indiquer comment sont distribuées les racines de l'équation

$$f(z) = t,$$

où t est une quantité complexe dont le module est C.

15. *Contribution à la théorie des résidus cubiques et biquadratiques* (Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, t. XVIII, p. 358-436; 1883).

La loi de réciprocité de Legendre est relative à deux nombres premiers impairs et, dans une théorie complète, le caractère du nombre 2, comme

résidu ou non-résidu quadratique d'un autre nombre premier impair, doit être déterminé séparément. Des remarques analogues se présentent dans la théorie des résidus biquadratiques et dans celle des résidus cubiques. D'autre part, les déterminations données par Eisenstein du caractère biquadratique de $1 + i$ et du caractère cubique de $1 - \rho$ sont fondées sur la loi générale de réciprocité au contraire de la marche suivie par Gauss pour établir le caractère de $1 + i$ qui, purement arithmétique, est aussi complètement indépendante de la loi générale de réciprocité.

Les remarques précédentes, faites par Stieltjes, l'ont conduit à une méthode *uniforme* permettant d'établir les théorèmes relatifs aux nombres premiers 2, $1 + i$, $1 - \rho$, et nécessaires pour compléter les lois de réciprocité. Le principe de cette méthode consiste à remplacer le nombre premier, dont il s'agit de déterminer le caractère, par un produit congruent de facteurs. On détermine alors le caractère de ces facteurs par des considérations tout à fait analogues à celles dont Gauss s'est servi dans les Articles 15-20 de son premier Mémoire sur la théorie des résidus biquadratiques.

Comme conséquence des développements donnés à propos de la détermination du caractère biquadratique de $1 + i$, Stieltjes établit les théorèmes énoncés par Gauss, dans l'Article 28 de la *Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda,* et qui n'avaient jusque-là été démontrés que partiellement par Lebesgue (1).

La fin du Mémoire (Art. 40) a trait à une congruence remarquable, donnée, pour la première fois, par Jacobi et dont la démonstration est ordinairement déduite de formules employées dans la théorie de la division du cercle; on trouvera une addition à ces dernières remarques dans le Mémoire : *Over de quadratische ontbinding van priemgetallen van den vorm* $3n + 1$, cité plus loin (n° 25).

16. *Sur la théorie des résidus biquadratiques* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. VII, p. 139-142; 1883).

Extrait du Mémoire précédent.

---

(1) LEBESGUE, *Suite des recherches sur les nombres,* p. 51, 52, *Remarque* 1° (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. IV; 1839).

17. *Sur le nombre des diviseurs d'un nombre entier* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVI, p. 764-766; 19 mars 1883).

$f(n)$ désignant le nombre des diviseurs de n, Stieltjes établit que

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}-\log n\right]=-1-2\Gamma'(1).$$

On trouvera, dans le même Tome des *Comptes rendus*, p. 1029 et suiv., une Note de M. E. Cesàro relative au théorème précédent.

18. *Sur l'évaluation approchée des intégrales* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 740-742; 1[er] octobre 1883).

Soit $f(x)$ une fonction qui reste constamment positive, quand la variable croît de $x=a$ jusqu'à $x=b$, et considérons l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{F}(x)\,dx. \tag{1}$$

M. Heine, dans son *Traité des fonctions sphériques*, a démontré que si $\mathrm{F}(x)$ est un polynome $\mathrm{G}(x)$, du degré $2n-1$ au plus, la valeur de cette intégrale peut s'obtenir à l'aide de n valeurs spéciales convenablement choisies $\mathrm{G}(x_1)$, $\mathrm{G}(x_2)$, $\ldots$, $\mathrm{G}(x_n)$. Les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont toutes différentes entre elles et s'obtiennent comme les racines d'une équation de degré n, dont les coefficients dépendent rationnellement des $2n$ constantes

$$c_t=\int_a^b x^t f(x)\,dx \qquad (t=0,1,2,\ldots,2n-1).$$

La valeur de l'intégrale (1) se présente alors sous la forme

$$\mathrm{A}_1\mathrm{G}(x_1)+\mathrm{A}_2\mathrm{G}(x_2)+\ldots+\mathrm{A}_n\mathrm{G}(x_n).$$

Stieltjes remarque que les coefficients A_1, A_2, $\ldots$, A_n sont tous positifs et en déduit une conséquence qui est précisée et étendue dans le Mémoire : *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques*, que l'on trouvera plus loin (n° 31).

19. *Sur l'évaluation approchée des intégrales* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 798-799; 8 octobre 1883).

La remarque, faite dans la Note précédente, que les A_k sont positifs conduit à d'autres conclusions.

Si l'on considère l'expression

$$\Omega = \int_a^b \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots,$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines du polynome, qui est le dénominateur de la réduite $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ d'ordre n de la fraction continue

$$\Omega = c_0 : (x-\alpha_0) - \lambda_1 : (x-\alpha_1) - \lambda_2 : (x-\alpha_2) - \lambda_3 : (x-\alpha_3) - \ldots.$$

Stieltjes énonce, comme conséquences de ce que les A_k sont positifs, les résultats suivants :

Les racines de l'équation $P_n(x) = 0$ séparent celles de l'équation $Q_n(x) = 0$.

Les racines de $Q_{n-1}(x) = 0$ séparent celles de $Q_n(x) = 0$ et les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ sont toutes positives.

α_{n-1} est compris dans l'intervalle limité par la plus petite et par la plus grande des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

20. *Sur quelques théorèmes arithmétiques* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 889-892, 22 octobre 1883).

Cet extrait d'une lettre adressée à M. Hermite est relatif aux fonctions $f(n)$, $F(n)$ exprimant le nombre des représentations de n par les formes $x^2 + y^2$ et $x^2 + 2y^2$ et à la fonction $\varphi(x)$ désignant la somme des diviseurs impairs de x.

21. *Sur la décomposition d'un nombre en cinq carrés* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 981-983, 5 novembre 1883).

Stieltjes indique une formule nouvelle pour le nombre des représentations d'un nombre $N \equiv 5$, mod. 8 en cinq carrés impairs et positifs.

A cette Communication est adjointe une Note de M. Hermite, où se trouve énoncée, pour la décomposition en cinq carrés impairs et positifs, une proposition que donnent les formules de la théorie des fonctions elliptiques.

22. *Sur un théorème de M. Liouville* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 1358; 10 décembre 1883).

Énoncé de trois théorèmes nouveaux analogues au théorème de Liouville sur les nombres de classes de formes quadratiques. Ces théorèmes ont été obtenus à l'aide de considérations arithmétiques et ont été ensuite vérifiés à l'aide de formules tirées de la théorie des fonctions elliptiques.

23. *Sur un théorème de M. Liouville* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 1415; 17 décembre 1883).

Après avoir montré comment la théorie des fonctions elliptiques conduit au théorème de Liouville, rappelé dans la précédente Note, Stieltjes ajoute, aux théorèmes qui y sont énoncés, trois autres propositions analogues.

24. *Sur le nombre de décompositions d'un entier en cinq carrés* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVII, p. 1545-1548; 31 décembre 1883).

Soient $\varphi(n)$ la somme des diviseurs impairs de n, $F(n)$ le nombre total des décompositions de n en cinq carrés; si l'on pose

$$A(n) = \varphi(n) + 2\varphi(n-4) + 2\varphi(n-16) + 2\varphi(n-36) + \ldots,$$
$$B(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n-9) + \varphi(n-25) + \varphi(n-49) + \ldots,$$

on a

$$F(n) = 24A(n) + 16B(n) \qquad (n \text{ pair}),$$
$$F(n) = 8A(n) + 48B(n) \qquad (n \text{ impair}).$$

En utilisant la relation

$$q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \ldots$$
$$= (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)\left[\frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} + \ldots\right]$$

qui lui a été communiquée par M. Hermite, Stieltjes montre que l'on peut toujours exprimer les deux fonctions $A(n)$ et $B(n)$ l'une par l'autre; il indique ensuite des relations qui permettent d'exprimer $B(4n)$ au moyen de $B(n)$ et qui ont leurs correspondantes pour la fonction $F(n)$.

La Note se termine par l'énoncé de résultats d'induction qui se tra-

duisent par les formules

$$B(p^2) = \frac{p^2 - p + 1}{4}, \qquad F(p^2) = 10(p^2 - p + 1),$$

$$B(p^4) = \frac{p(p^2-1)(p^2+1)+1}{24}, \qquad F(p^4) = 10[p(p^2-1)(p^2+1)+1].$$

On pourra lire à ce propos une Note ultérieure de M. Hurwitz (¹).

25. *Over de quadratische ontbinding van priemgetallen van den vorm* $3n+1$ (Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 2ᵉ série, t. XIX, p. 105-111; 1884).

Tout nombre premier p de la forme $3n+1$ jouit des propriétés exprimées par les formules suivantes

$$(1) \qquad p = c^2 + 3d^2,$$

$$(2) \qquad 4p = A^2 + 27B^2,$$

où c, d, A, B sont des entiers et chacune de ces deux décompositions n'est possible que d'une seule manière.

Jacobi a indiqué, sans démonstration, que la valeur de A qui figure dans (2) est égale au reste qu'on obtient en divisant le nombre entier

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}$$

par p et choisissant le reste compris entre $-\frac{1}{2}p$ et $+\frac{1}{2}p$.

La démonstration de cette propriété, qui est étroitement liée à l'étude de l'équation algébrique dont dépend la division de la circonférence en p parties égales, a été donnée par différents auteurs et notamment par Cauchy et Lebesgue; dans l'Article 40 du Mémoire : *Contribution à la théorie des résidus cubiques et biquadratiques* (nᵒˢ 10 et 15), Stieltjes, désignant par $a + b\rho$ un facteur primaire de p et par ρ une racine cubique primitive de l'unité, a établi la congruence

$$2a - b \equiv -\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n} \bmod p,$$

(¹) A. Hurwitz, *Sur la décomposition des nombres en cinq carrés* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCVIII, p. 504; 25 février 1884).

qui correspond au théorème de Jacobi; il se propose ici, comme addition, de déduire de cette congruence la détermination directe suivante de la racine c du carré simple figurant dans (1) : c est le reste, compris entre $-\frac{1}{2}p$ et $+\frac{1}{2}p$, que l'on obtient dans la division de

$$2^{n-1}\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}$$

par p; de plus $c-1$ est divisible par 3.

Stieltjes déduit de son résultat la congruence donnée, pour la détermination de c, par M. Oltramare [1].

26. *Note sur le déplacement d'un système invariable dont un point est fixe* (Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, t. XIX, p. 372-390; 1884).

Le déplacement considéré se ramène toujours, comme on sait, à une rotation autour d'un axe passant par le point fixe. Les formules données par différents auteurs, et en particulier par Duhamel, pour déterminer la position de l'axe de rotation cessent de donner cette position dans un cas où elle est cependant parfaitement déterminée, savoir dans le cas où le déplacement se ramène, suivant une expression de M. Darboux, à un renversement, c'est-à-dire à une rotation d'un angle égal à 180°. C'est ce qui amène Stieltjes à revenir sur cette question et le conduit à des propositions intéressantes d'Algèbre, parmi lesquelles on peut citer un théorème que l'on trouvera énoncé de nouveau dans l'article *Un théorème d'Algèbre* (n° 39).

27. *Sur quelques applications arithmétiques de la théorie des fonctions elliptiques* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCVIII, p. 663; 17 mars 1884).

Stieltjes énonce, à l'égard de la décomposition en 7 carrés, des résultats qui ne sont guère plus compliqués que dans le cas de la décomposition en 5 carrés. La fin de la Note renferme l'énoncé d'un autre résultat auquel

---

[1] G. Oltramare, *Sur la transformation des formes linéaires des nombres premiers en formes quadratiques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII, p. 734; 1878).

conduit l'analyse des fonctions elliptiques et qui est relatif à la fonction $F(n)$ de M. Kronecker.

28. *Sur le caractère du nombre 2 comme résidu ou non-résidu quadratique* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. VIII, p. 175-176; 1884).

Cette détermination du caractère du nombre 2 est devenue classique ([1]).

29. *Quelques remarques sur l'intégration d'une équation différentielle* (Astronomische Nachrichten, t. CIX, p. 145, 261, nos 2602, 2609; 1884).

Stieltjes remarque que l'équation différentielle

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + n^2 x = 2\beta x \cos t$$

où n, β sont des constantes, étudiée par M. H. Bruns dans les nos 2533, 2553 du même Recueil, et par M. Callandreau dans le no 2547, a été considérée aussi par M. F. Lindemann ([2]). Il montre comment on peut déduire les conclusions de M. Bruns de l'analyse de M. Lindemann et revient sur le calcul d'une constante dont la détermination est la principale difficulté qu'on rencontre dans l'application numérique.

30. *Note sur le problème du plus court crépuscule* (Astronomische Nachrichten, t. CX, p. 7, no 2617; 1884).

Dans cette Note, Stieltjes remarque que la solution du problème ne devient guère plus compliquée en tenant compte de la réfraction et du diamètre du Soleil.

31. *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques* (Annales de l'École Normale supérieure, 3e série, t. I, p. 409-426; 1884).

Le but de ces recherches, qui ont été précédées de deux Notes *Sur*

([1]) *Voir* E. Borel et J. Drach, *Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure*, p. 85 et suivantes.

([2]) F. Lindemann, *Ueber die Differentialgleichung der Functionen des elliptischen Cylinders* (*Mathematische Annalen*, t. XXII, p. 117; 1883).

l'évaluation approchée des intégrales (n°s 18, 19), est d'examiner si les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie permettent d'atteindre une approximation indéfinie.

Le Traité des fonctions sphériques de M. Heine sert de base pour le commencement de l'exposition.

Soit $f(x)$ une fonction *donnée* qui n'est pas constamment nulle et qui ne devient pas négative, quand x prend les valeurs a, b et toutes les valeurs intermédiaires, et telle que $\int_a^b f(x)dx$ ait un sens. Si l'on cherche à déterminer un polynome $P(x)$ d'un degré *donné* n, et pour lequel le coefficient de x^n est égal à l'unité, par les conditions

$$(1)\qquad \int_a^b f(x)P(x)x^k dx = 0 \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

on obtient une solution unique qui sera désignée par $P_n(x)$.

On aura ainsi, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, des polynomes $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, ...

La propriété principale de ces polynomes consiste en ce que l'on a

$$\int_a^b f(x)P_n(x)(\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \ldots + \lambda x + \mu)dx = 0,$$

quelles que soient les constantes α, β, ..., λ, μ.

On en déduit que l'on a

$$\int_a^b f(x)P_m(x)P_n(x)dx = 0$$

et que les racines de l'équation $P_n(x) = 0$ sont réelles, inégales et comprises entre a et b en excluant les limites.

Le polynome $Q(x)$, du degré n, le plus général qui satisfasse aux mêmes conditions (1) que $P(x)$ ne se distingue de $P_n(x)$ que par un facteur constant.

Entre trois polynomes consécutifs P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, existe une relation de la forme

$$(2)\qquad P_n(x) = (x-\alpha_{n-1})P_{n-1}(x) - \lambda_{n-1}P_{n-2}(x).$$

avec

$$P_1(x) = x - \alpha_0,$$
$$P_2(x) = (x - \alpha_1) P_1(x) - \lambda_1.$$

Les constantes α_k, λ_k qui y figurent s'expriment par les formules élégantes

(3)
$$\alpha_k = \frac{\int_a^b x P_k(x) P_k(x) f(x)\, dx}{\int_a^b P_k(x) P_k(x) f(x)\, dx},$$

(4)
$$\lambda_k = \frac{\int_a^b P_k(x) P_k(x) f(x)\, dx}{\int_a^b P_{k-1}(x) P_{k-1}(x) f(x)\, dx},$$

en sorte que α_k reste compris entre a et b, tandis que λ_k est toujours positif.

Les relations (2) jointes à (3), (4) permettent de calculer de proche en proche tous les polynomes $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... et elles montrent que les racines de $P_{k-1}(x) = 0$ séparent celles de $P_k(x) = 0$.

Les résultats précédents s'appliquent immédiatement à la quadrature mécanique; soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de $P_n(x) = 0$ rangées par ordre de grandeur croissante et $G(x)$ un polynome entier en x, du degré $2n - 1$ au plus; on a

$$\int_a^b f(x) G(x)\, dx = A_1 G(x_1) + A_2 G(x_2) + \ldots + A_n G(x_n),$$

où les constantes A_k ne dépendent en aucune façon du polynome $G(x)$ et sont déterminées par la formule

$$A_k = \int_a^b f(x) \frac{P_n(x)}{(x - x_k) P'_n(x_k)}\, dx.$$

Ces constantes A_k sont positives et vérifient les inégalités

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k > \int_a^{x_k} f(x)\, dx \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n),$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k < \int_a^{x_{k+1}} f(x)\, dx \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1),$$

qui, à l'insu de Stieltjes, avaient été déjà découvertes par M. **Tchebychef.** Ce dernier les avaient publiées sans démonstration ([1]) et un de ses élèves, M. Markoff, en a donné une démonstration ([2]) qui a été publiée très peu de temps avant le Mémoire de Stieltjes ([3]).

Avant de poursuivre les considérations générales, Stieltjes considère le cas particulier de la quadrature de Gauss où l'on a $f(x) = 1$, $a = -1$, $b = +1$, et où le polynome $P_n(x)$ ne diffère que par un facteur constant du polynome X_n de Legendre; il arrive à cette conclusion que l'expression

$$A_1 F(x_1) + A_2 F(x_2) + \ldots + A_n F(x_n)$$

donne, avec une approximation indéfinie, la valeur de $\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$, en augmentant n, toutes les fois que $F(x)$ est limitée et intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Cette conclusion, relative au cas spécial que l'on vient de considérer, repose sur ce que les connaissances acquises sur les polynomes de Legendre permettent d'affirmer que les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont alors distribuées de façon que les quantités $x_1 + 1$, $x_2 - x_1$, $\ldots$, $x_n - x_{n-1}$, $1 - x_n$ deviennent infiniment petites avec $\frac{1}{n}$.

Peut-on, dans le cas général, énoncer des résultats analogues?

La réponse donnée par Stieltjes est la suivante : dans le cas général, lorsque n augmente indéfiniment, les intégrales

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \quad \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx, \quad \ldots, \quad \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx, \quad \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx$$

convergent toutes vers zéro, sans qu'on puisse dire la même chose des différences

$$x_1 - a, \quad x_2 - x_1, \quad x_3 - x_2, \quad \ldots, \quad x_n - x_{n-1}, \quad b - x_n;$$

de plus les A_k convergent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

([1]) Tchebychef, *Sur les valeurs limites des intégrales* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XIX, p. 157; 1874).

([2]) A. Markoff, *Démonstration de certaines inégalités de M. Tchebychef* (*Mathematische Annalen*, t. XXIV, p. 172; 1884).

([3]) *Voir* plus loin la *Note à l'occasion de la réclamation de M. Markoff* (n° 37).

Comme application du résultat précédent, Stieltjes prouve que si l'on assujettit la fonction $f(x)$ à cette *nouvelle condition,* qu'il n'existe pas un intervalle (α, β), compris dans l'intervalle (a, b), et tel que l'on ait

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$$

l'expression

$$A_1 F(x_1) + A_2 F(x_2) + \ldots + A_n F(x_n),$$

relative à la fonction intégrable $F(x)$, donne, avec une approximation indéfinie, la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x) F(x)\,dx$.

32. *Sur un développement en fraction continue* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCIX, p. 508-509, 22 septembre 1884.)

Si $A_1 F(x_1) + A_2 F(x_2) + \ldots + A_n F(x_n)$ est l'expression approchée de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$, donnée par la quadrature de Gauss, et si l'on désigne par $\frac{P_n}{Q_n}$ la réduite d'ordre n de la fraction continue

$$\Omega = 2 : z - \frac{1.1}{1.3} : z - \frac{3.3}{5.7} : z - \frac{4.4}{7.9} : z - \ldots,$$

on sait que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines de l'équation $Q_n = 0$; et la décomposition en fractions simples donne

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{A_1}{z - x_1} + \frac{A_2}{z - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{z - x_n}. \tag{1}$$

Stieltjes remarque que si z a une valeur quelconque réelle ou imaginaire, non comprise dans l'intervalle $(-1, +1)$, il résulte des inégalités de M. Tchebychef (n° 31) qui deviennent ici

$$-1 < x_1 < -1 + A_1 < x_2 < -1 + A_1 + A_2 < x_3 < \ldots < -1 + A_1 + \ldots + A_{n-1} < x_n < 1$$

et de la définition même de l'intégrale définie que le second membre de (1) converge, lorsque n augmente indéfiniment, vers une limite déterminée, savoir l'intégrale (rectiligne) $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{z - x}$.

Ainsi, la fraction continue Ω converge dans tout le plan, en exceptant la coupure rectiligne de -1 à $+1$ et l'on voit facilement qu'elle converge uniformément dans le voisinage de toute valeur particulière appartenant à la région de convergence.

Cette démonstration très simple du résultat connu a cela de remarquable qu'elle présente la fraction continue comme une *transformation identique* de l'intégrale définie. C'est le désir de généraliser cette singulière réduction l'une à l'autre de deux expressions analytiques si différentes, une intégrale définie et une fraction continue, qui a conduit Stieltjes [1] à de nouvelles recherches inaugurées dans ses deux Notes publiées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* des 25 mars et 24 juin 1889 (n°s 66 et 67).

Stieltjes termine sa Note en indiquant que la démonstration qu'il vient de donner est encore applicable à la fraction continue que l'on obtient pour l'intégrale $\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}dx$, $f(x)$ étant une fonction qui ne devient pas négative dans l'intervalle (a, b).

33. *Note sur la densité de la Terre* (Bulletin astronomique, t. I, p. 465; 1884).

Cette Note, provoquée par les recherches de M. Tisserand sur le même sujet, est consacrée à la démonstration d'une inégalité qui entraîne une limite inférieure pour la densité ρ_0 au centre de la Terre, en considérant cette dernière comme entièrement fluide et composée d'une infinité de couches ellipsoïdales homogènes de révolution. Cette inégalité, que l'on trouvera établie par une autre voie au tome II, p. 226, du *Traité de Mécanique céleste* de M. Tisserand, est la suivante :

Soient a le demi petit axe et ρ la densité correspondante d'une couche quelconque; prenons, comme unité de longueur, la valeur de a à la surface, désignons par

$$\Delta = 3\int_0^1 \rho a^2 da,$$

---

[1] Le lecteur pourra se reporter à la fin de la page 96 du Mémoire : *Recherches sur les fractions continues* (n° 82).

la densité moyenne de la Terre et par λ la fraction

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \rho a^2 da}{\int_0^1 \rho a^4 da}.$$

Si ρ_0 et ρ_1 désignent les densités de la Terre au centre et à la surface, on a l'inégalité suivante

$$(\rho_0 - \rho_1)^2 (\Gamma - \rho_1)^3 > (\Delta - \rho_1)^5,$$

où nous posons, avec M. Tisserand,

$$\Gamma = \frac{5\Delta}{3\lambda} = 5\int_0^1 \rho a^4 da.$$

34. *Quelques remarques sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre* (Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, t. XIX, p. 435-460; 1884).

Ce Mémoire a été réimprimé en 1885 et sera analysé plus loin (n° 38).

35. *Note sur quelques formules pour l'évaluation de certaines intégrales* (Bulletin astronomique, t. I, p. 568; 1884).

Cette Note renferme l'indication de formules relatives au calcul approché des intégrales définies prises sous les formes suivantes :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} f(x) dx, \quad \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x) dx$$

et

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x) dx, \quad \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} f(x) dx.$$

36. *Sur une généralisation de la théorie des quadratures mécaniques* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XCIX, p. 850; 17 novembre 1884).

Soit $f(x)$ une fonction qui ne devient pas négative dans l'intervalle de zéro à l'unité, et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des nombres positifs inégaux donnés;

lorsque n est pair, égal à $2m$, le système des $2m$ équations

$$(1) \qquad a_k = \int_0^1 x^{\lambda_k} f(x)\,dx = A_1 x_1^{\lambda_k} + A_2 x_2^{\lambda_k} + \ldots + A_m x_m^{\lambda_k}$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, 2m)$$

admet une solution par des nombres positifs $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ qui sont positives, inégales et inférieures à l'unité. Cette solution est unique, en faisant abstraction des permutations que l'on peut effectuer simultanément sur les quantités $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

De même, lorsque $n = 2m + 1$, le système des équations

$$(2) \qquad a_k = A_1 x_1^{\lambda_k} + A_2 x_2^{\lambda_k} + \ldots + A_m x_m^{\lambda_k} + A_{m+1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, 2m+1)$$

admet une solution unique, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ étant positifs, inégaux et inférieurs à l'unité, $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}$ étant positifs.

Lorsque n est pair et qu'on prend $\lambda_k = k - 1$, on se trouve dans le cas des quadratures mécaniques.

Stieltjes conclut que l'on a

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m \leqq \int_0^1 f(x)\,dx,$$
$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{m+1} \geqq \int_0^1 f(x)\,dx,$$

d'une interprétation mécanique des formules (1), (2), que l'on retrouvera dans le Mémoire : *Recherches sur les fractions continues* (n° 82).

37. *Note à l'occasion de la réclamation de M. Markoff* (Annales de l'École Normale supérieure, 3e série, t. II, p. 183-184; 1885).

Stieltjes se plaît à reconnaître que M. Markoff a, le premier, publié une démonstration des inégalités de M. Tchebychef, et il profite de l'occasion pour présenter quelques remarques et pour indiquer des propriétés nouvelles des coefficients A_k exprimées par les inégalités

$$A_1^{n+1} + A_2^{n+1} + \ldots + A_k^{n+1} < A_1^n + A_2^n + \ldots + A_k^n,$$
$$A_1^{n+1} + A_2^{n+1} + \ldots + A_k^{n+1} > A_1^n + A_2^n + \ldots + A_{k-1}^n,$$

où, pour expliquer la dépendance de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vis-à-vis du nombre entier n, on a maintenant désigné ces nombres par $A_1^n, A_2^n, \ldots, A_n^n$.

38. *Quelques remarques sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre* (Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 3e série, t. I, 272-297; 1885).

Ce travail, publié déjà en 1884 dans un autre Recueil (nº 34), et qui fait suite à la *Note sur la densité de la Terre* (nº 33), a un rapport intime avec les inégalités de M. Tchebychef établies dans le Mémoire : *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques* (nº 31), et avec certaines recherches presque simultanées de M. Markoff publiées en russe ([1]).

Stieltjes examine ici la question de savoir si les données d'observation permettent d'enfermer les variations possibles de la densité à l'intérieur de la Terre dans des limites déterminées ([2]).

Conservons les notations de la *Note sur la densité de la Terre* (nº 33); Stieltjes supposant que l'on connaisse les deux intégrales

$$\int_0^1 \rho a^2 da, \quad \int_0^1 \rho a^4 da,$$

ainsi que la valeur de la densité ρ à la surface, se propose de limiter, autant que possible, la marche de la fonction inconnue ρ de a; il examine successivement les deux hypothèses suivantes :

1° La densité va continuellement en croissant de la surface jusqu'au centre de la Terre;

2° La densité va continuellement en croissant de la surface jusqu'au centre, mais la rapidité de cet accroissement va en diminuant de la surface jusqu'au centre.

Pour chacune de ces hypothèses, Stieltjes détermine les limites entre lesquelles est comprise la densité correspondant à une valeur déterminée, mais arbitraire, de a; il est digne de remarque que son analyse repose à peu près uniquement sur la proposition suivante :

Lorsqu'on vérifie les deux relations

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{H}(x)\,dx = \mathrm{A}, \quad \int_0^1 x^4 \mathrm{H}(x)\,dx = \mathrm{B},$$

([1]) Ces recherches ont été publiées plus tard en français : A. Markoff, *Sur une question de maximum et de minimum proposée par M. Tchebychef* (*Acta Mathematica*, t. IX, p. 57; 1886).

([2]) On trouvera dans le *Traité de Mécanique céleste* de M. Tisserand (t. II, p. 227 et suivantes) une démonstration, due à M. Radau, de quelques-uns des résultats de Stieltjes.

où A et B sont deux nombres donnés, en y remplaçant successivement $H(x)$ par deux fonctions $F(x)$, $G(x)$, la différence $F(x) - G(x)$, si elle n'est pas identiquement nulle, change au moins deux fois de signe dans l'intervalle de zéro à l'unité.

La fin du Mémoire est consacrée à la mise en nombres des résultats obtenus et à une discussion des hypothèses proposées par Legendre, Roche et M. Lipschitz pour la constitution intérieure de la Terre.

39. *Un théorème d'Algèbre* (Acta Mathematica, t. VI, p. 319-320; 1885).

Dans la *Note sur le déplacement d'un système invariable dont un point est fixe* (n° 26), Stieltjes a rencontré le théorème suivant :

Soient

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

les déterminants, égaux à $+1$, de deux substitutions orthogonales; le déterminant

$$\begin{vmatrix} A+a & B+b & C+c \\ A'+a' & B'+b' & C'+c' \\ A''+a'' & B''+b'' & C''+c'' \end{vmatrix}$$

jouit de cette propriété que, lorsqu'il s'annule, il en est de même de tous ses mineurs du premier ordre.

Ce théorème, qui trouve sa signification géométrique dans la considération d'un déplacement se ramenant à une rotation de 180° autour d'un certain axe, est encore vrai dans le cas de déterminants à deux lignes et deux colonnes.

Stieltjes, en terminant, demande s'il est possible de l'étendre à un nombre quelconque de variables.

La réponse à cette question a été donnée par M. Netto qui est revenu à deux reprises différentes sur le sujet [1].

---

[1] E. Netto, *Ueber orthogonale Substitutionen* (*Acta Mathematica*, t. IX, p. 295-300; 1887). — *Zur Theorie der orthogonalen Determinanten* (*Acta Mathematica*, t. XIX, p. 105-114; 1895).

40. *Sur certains polynomes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé* (Acta Mathematica, t. VI, p. 321-326; 1885).

M. Klein avait complété et étendu (¹) certaines propositions de Liouville relatives aux fonctions de Lamé. Dans le travail actuel, Stieltjes donne du théorème de M. Klein une autre démonstration qui joint à l'avantage de la simplicité celui de s'appliquer à une classe plus générale de polynomes; elle se relie à la proposition suivante de M. Heine (²): Soient A et B deux polynomes donnés en x, le premier du degré $p+1$, le second du degré p au plus, ces polynomes étant d'ailleurs tout à fait généraux et n'étant assujettis à aucune condition; considérons l'équation différentielle

$$A\frac{d^2y}{dx^2}+2B\frac{dy}{dx}+Cy=0, \tag{1}$$

où C est un polynome en x du degré $p-1$ au plus; il existe toujours des déterminations particulières du polynome C, telles que l'équation (1) admette comme intégrale un polynome en x du degré n; le nombre de ces déterminations et des polynomes correspondants y s'élève à $(n.p)$, en posant

$$(n.1)=1,$$

$$(n.p)=\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)}{1.2.3\dots(p-1)}.$$

A ce théorème, qui constitue le fondement principal de la théorie générale des fonctions de Lamé qu'on doit à M. Heine, Stieltjes ajoute le suivant :

Lorsque les racines $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ de l'équation $A=0$ sont réelles et inégales et qu'en posant

$$\frac{B}{A}=\frac{\alpha_0}{x-a_0}+\frac{\alpha_1}{x-a_1}+\dots+\frac{\alpha_p}{x-a_p},$$

les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont positives, alors les $(n.p)$ déterminations

---

(¹) F. KLEIN, *Ueber Lamé'sche Functionen* (*Mathematische Annalen*, t. XVIII, p. 237; 1881).

(²) HEINE, *Traité des fonctions sphériques*, 2ᵉ édition, t. I, p. 472 et suivantes.

du polynome C sont toutes réelles ainsi que les polynomes correspondants y du degré n. Un tel polynome y a ses racines réelles, inégales et distribuées dans les p intervalles des racines de $A = 0$; de plus, il est caractérisé par la distribution de ses n racines dans ces p intervalles.

L'application du théorème précédent aux fonctions de Lamé conduit immédiatement au théorème de M. F. Klein.

41. *Sur quelques théorèmes d'Algèbre* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. C, p. 439-440; 16 février 1885).

L'expression

$$(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)\ldots(1-\xi_n^2)\Pi(\xi_k-\xi_l)^2 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

est maxima lorsqu'on prend pour $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les racines du polynome X_n de Legendre.

De même les racines du polynome

$$U_n = x^n - 1 . \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} + 1.3 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} x^{n-4} - \ldots,$$

défini par la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} U_m U_n \, dx = 0 \qquad (m \gtrless n),$$

font acquérir un maximum à l'expression

$$e^{-\frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2)}\Pi(\xi_k-\xi_l)^2.$$

Enfin, parmi toutes les équations du degré n, dont les racines sont réelles et comprises dans l'intervalle $(-1, +1)$, celle qui a son discriminant maximum est $V_n = 0$, en posant

$$\sqrt{1-2xz+z^2} = \sum_0^\infty V_n z^n.$$

42. *Sur les polynomes de Jacobi* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. C, p. 620-622; 2 mars 1885).

L'équation

$$F(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha, x) = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$X = x^n - \frac{n.a}{1.c} x^{n-1} + \frac{n(n-1)a(a-1)}{1.2.c(c-1)} x^{n-2} - \ldots = 0,$$

où

$$a = \alpha + n - 1, \qquad c = \alpha + \beta + 2n - 2.$$

Après avoir donné des expressions remarquables des termes de la suite de Sturm relative au polynome X et indiqué que l'équation $X = 0$ ne peut avoir d'autres racines multiples que 0 et 1, Stieltjes termine par l'énoncé de la proposition suivante :

Lorsque α et β sont positifs, les racines de $X = 0$ sont comprises dans l'intervalle (0, 1) et font acquérir un maximum à l'expression

$$(\xi_1\xi_2\ldots\xi_n)^\alpha[(1-\xi_1)(1-\xi_2)\ldots(1-\xi_n)]^\beta \Pi(\xi_r-\xi_s)^2 \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n).$$

43. *Sur une généralisation de la série de Lagrange* (Annales de l'École Normale supérieure, 3e série, t. II, p. 93-98; 1885).

Stieltjes établit que la généralisation de la série de Lagrange, donnée pour la première fois par M. Darboux [1], dans le cas de deux variables, peut être étendue au cas d'un nombre quelconque de variables.

44. *Sur l'intégrale* $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}}$ (Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. IX, p. 306-311; 1885).

Stieltjes se propose d'obtenir le développement de cette intégrale [2] suivant les puissances descendantes de a, développement qui peut servir utilement pour le calcul numérique dans le cas où le nombre positif a est très grand et que b ne l'est pas; il obtient la formule suivante

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = V_0(b) + \frac{V_1(b)}{a} + \frac{V_2(b)}{a^2} + \ldots + \frac{V_{n-1}(b)}{a^n} + \frac{R_n}{a^n},$$

---

(1) G. Darboux, *Sur la série de Laplace* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXVIII, p. 324; 1869).

(2) Au sujet de l'origine de cette intégrale, on pourra lire, par exemple, dans le *Bulletin astronomique* (t. II, p. 573 et suivantes), l'analyse, faite par M. Radau, d'un Mémoire de M. Schols.

dans laquelle les polynomes $V_0(b)$, $V_1(b)$, $V_2(b)$, ... se calculent de proche en proche par les relations

$$\begin{aligned}
V_0(b) &= \tfrac{1}{2},\\
V_1(b) &= -\tfrac{1}{2}[\;b \qquad V_0(b)],\\
V_2(b) &= -\tfrac{1}{2}[(b+1)\,V_1(b)],\\
V_3(b) &= -\tfrac{1}{2}[(b+2)\,V_2(b)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

où le symbole $[f(b)]$ désigne le résultat obtenu en ordonnant $f(b)$ suivant les puissances de b et en remplaçant b^k par

$$b^k - \frac{k}{2}b^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2.2}b^{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{2.2.2}b^{k-3} + \ldots.$$

Quant au reste $\frac{R_n}{a^n}$, il est déterminé au moyen du polynome $V_{n-1}(b)$ par la formule

$$R_n = \int_0^\infty \frac{(x-b-n+1)\,V_{n-1}(b-x)e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n}}.$$

45. *Sur une fonction uniforme* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CI, p. 153-154; 13 juillet 1885).

Cette Note est consacrée à l'étude des racines imaginaires de l'équation $\zeta(z) = 0$, dont le premier membre est défini pour les valeurs de z dont la partie réelle surpasse l'unité par la série

$$1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \ldots.$$

Stieltjes, après avoir démontré que la série d'Euler

$$\frac{1}{\zeta(z)} = 1 - \frac{1}{2^z} - \frac{1}{3^z} - \frac{1}{5^z} + \frac{1}{6^z} - \frac{1}{7^z} + \frac{1}{10^z} - \ldots,$$

est convergente et définit une fonction analytique tant que la partie réelle de z surpasse $\frac{1}{2}$, en déduit que toutes les racines imaginaires de $\zeta(z) = 0$ sont, conformément aux prévisions de Riemann, de la forme $\frac{1}{2} + ai$, a étant réel.

On trouvera dans le même Tome des *Comptes rendus*, p. 112-115, une Note de M. Hermite au sujet de la Communication précédente de Stieltjes.

46. *Sur une loi asymptotique dans la théorie des nombres* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CI, p. 368-370; 3 août 1885).

Le théorème énoncé dans la précédente Note (n° 45), savoir que la série

$$1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \ldots$$

est convergente pour $s > \frac{1}{2}$, conduit Stieltjes à une conséquence importante relative à la fonction $\Theta(x)$ considérée par M. Tchebychef et qui représente la somme des logarithmes des nombres premiers qui ne surpassent pas x.

En posant

$$\Theta(n) + \Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + \Theta\left(n^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots = n + A_n n^s,$$

on trouve

$$\lim A_n = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = \infty, \qquad s > \tfrac{3}{4}.$$

On a aussi

$$\Theta(n) = n + B_n n^s$$

où

$$\lim B_n = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = \infty, \qquad s > \tfrac{3}{4}.$$

On en déduit ce résultat que, quelque petit que soit un nombre positif h, le nombre des nombres premiers compris entre

$$n \quad \text{et} \quad (1 + h)n$$

finit toujours par croître, au delà de toute limite, quand n croît indéfiniment.

Stieltjes utilise ici des propriétés de séries de la forme $\sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^s}$, où s est positif, sur lesquelles on trouvera également des indications dans la *Note sur la multiplication de deux séries,* analysée plus loin (n° 55).

47. *Sur quelques formules qui se rapportent à la théorie des fonctions elliptiques* (Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 3e série, t. II, p. 101-104; 1886).

Les formules en question se déduisent des propriétés fondamentales de la fonction Θ et de formules données par Gauss.

Soit D un nombre entier positif ou négatif qui n'est divisible par aucun carré, hors l'unité; à l'égard de ce nombre D, Stieltjes distingue quatre

cas; il nous suffira, pour indiquer le caractère des formules écrites ici, de transcrire celles qui se rapportent au premier cas

$$D > 0, \qquad D \equiv 2, 3 \bmod 4.$$

Posons

$$F(x) = \sum \left(\frac{D}{m}\right) e^{-\frac{m^2 \pi x}{D}},$$

où m désigne les nombres impairs 1.3.5.7... et où $\left(\frac{D}{m}\right)$ est le symbole de Legendre généralisé par Jacobi, avec la convention ordinaire que $\left(\frac{D}{m}\right) = 0$, lorsque D et m ne sont pas premiers entre eux.

Cette fonction $F(x)$ jouit des propriétés suivantes

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\, F(x),$$
$$F(x + Di) = e^{-\frac{\pi i}{4}} F(x).$$

48. *Sur quelques intégrales définies* (Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 3[e] série, t. II, p. 210-216; 1886).

Stieltjes remarque qu'on doit regarder la formule de Legendre

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{2\pi x} - 1}\, dx = \frac{1}{4}\, \frac{e^m + 1}{e^m - 1} - \frac{1}{2m}$$

comme le cas le plus simple de toute une série de formules qui présentent un caractère éminemment arithmétique; il se borne à indiquer les deux exemples suivants comme devant faire connaître suffisamment le caractère des formules nouvelles.

Soit p un nombre entier positif impair ($p > 1$) sans diviseur carré, et posons

$$f(x) = \sum_1^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right) x^n,$$

$\left(\frac{n}{p}\right)$ étant, comme dans la Communication précédente (n° 47), le symbole de Legendre généralisé par Jacobi.

Si l'on suppose $p \equiv 1 \bmod 4$, on a

$$\int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1-e^{-px}} \sin\left(\frac{ptx}{2\pi}\right) dx = \frac{\pi}{\sqrt{p}} \frac{f(e^{-t})}{1-e^{-pt}}.$$

Si l'on suppose, au contraire, $p \equiv 3 \bmod 4$, on a

$$\int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1-e^{-px}} \cos\left(\frac{ptx}{2\pi}\right) dx = \frac{\pi}{\sqrt{p}} \frac{f(e^{-t})}{1-e^{-pt}}.$$

Ces résultats se déduisent des deux développements en série, correspondant aux hypothèses précédentes faites sur p, de l'expression $\frac{f(e^{-x})}{1-e^{-px}}$; ces développements s'expriment au moyen de la fonction

$$\varphi(s) = \sum_1^\infty \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1-e^{-px}} x^{s-1} dx.$$

Stieltjes, s'attachant ensuite à cette fonction $\varphi(s)$ et après avoir rappelé qu'elle est holomorphe dans tout le plan, établit, par un raisonnement qui lui est propre, la relation remarquable, découverte par M. Hurwitz, entre $\varphi(s)$ et $\varphi(1-s)$; il remarque également que les formules données dans sa Communication précédente (n° 47) permettent d'établir d'une manière beaucoup plus simple encore cette relation entre $\varphi(s)$ et $\varphi(1-s)$; il termine en examinant d'un peu plus près les développements donnés précédemment pour $\frac{f(e^{-x})}{1-e^{-px}}$ et il retrouve, en particulier, une formule qui s'était présentée déjà à Dirichlet dans ses recherches sur la détermination du nombre des classes de formes quadratiques à deux indéterminées.

49. *Sur le nombre des pôles à la surface d'un corps magnétique* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CII, p. 805; 5 avril 1886).

Généralisation de résultats obtenus par Betti et par M. Reech. Lorsque la surface fermée, qui limite le corps magnétique, est $2k+1$ fois connexe, le nombre des pôles neutres, diminué du nombre des autres pôles, est égal à $2k-2$; comme il y a toujours au moins un pôle boréal et un pôle austral, il s'ensuit que le nombre des pôles neutres est au moins égal à $2k$.

50. *Recherches sur quelques séries semi-convergentes. Thèse de doctorat* (Annales de l'École Normale supérieure, 3ᵉ série, t. III, p. 201-258; 1886).

L'objet de ce Travail est l'étude de quelques développements de la forme

$$\text{(A)} \qquad F(a) = m_0 + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \frac{m_3}{a^3} + \ldots,$$

que l'on ne pourrait continuer indéfiniment s'il s'agissait d'un calcul numérique, la série étant divergente. Un tel développement a un sens précis pourvu que l'on regarde la formule (A) comme une manière symbolique d'exprimer que, pour $a = \infty$:

$$\lim F(a) = m_0,$$
$$\lim a[F(a) - m_0] = m_1,$$
$$\lim a^2\left[F(a) - m_0 - \frac{m_1}{a}\right] = m_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Stieltjes distingue, parmi les développements précédents, les *séries de première espèce,* pour lesquelles le signe des coefficients $m_0, m_1, m_2, \ldots$ est alternativement positif et négatif, et les *séries de seconde espèce* pour lesquelles les coefficients ont le même signe.

Ce sont surtout ces dernières qui sont envisagées ici; Stieltjes considère que, si l'on veut se servir de la formule (A) pour évaluer $F(a)$, le vrai problème à résoudre, dans le cas où la série est de seconde espèce, est la détermination du rang du reste R_n qui, pour la première fois, a changé de signe. Le logarithme intégral lui fournit le premier exemple d'une série de seconde espèce; il considère ensuite les transcendantes $\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2}du$, $\int_0^\infty \frac{u\cos au}{1+u^2}du$ qui donnent aussi des séries de seconde espèce. La considération de $\log\Gamma(ai)$ le conduit encore à une telle série et le résultat, auquel il parvient, permet de se faire une idée nette de la manière dont se comporte la fonction holomorphe $\frac{1}{\Gamma(z)}$, lorsque la variable z décrit l'axe des y. Il considère ensuite les deux intégrales $J(a)$, $K(a)$ de l'équation différentielle

$$\frac{d^2z}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dz}{da} + z = 0;$$

elles donnent lieu à des séries de première espèce et conduisent, dans le cas où l'argument est de la forme ai, à deux séries rencontrées par Riemann; l'une de ces séries est de première espèce; l'autre, donnée par $J(ai)$, est de seconde espèce et, dans ce cas, la résolution approchée de l'équation $R_n = 0$ présente d'assez grandes difficultés.

Le Mémoire se termine par l'étude d'un cas intéressant donné par M. Schlömilch, celui de la série de seconde espèce qui peut servir au calcul de la fonction

$$P(a) = \sum_1^\infty \frac{1}{e^{\frac{n}{a}} - 1};$$

Stieltjes obtient encore, dans ce cas, la solution approchée de l'équation transcendante $R_n = 0$.

51. *Note sur le développement de l'intégrale* $\int_0^a e^{x^2}dx$ (Acta Mathematica, t. IX, p. 167-176; 1886).

Cette Note, qui se rattache au Mémoire précédent (n° 50), est consacrée à l'étude, faite toujours au même point de vue, du développement

$$(1) \qquad e^{-a^2}\varphi(a) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a^3} + \frac{1.3}{8a^5} + \frac{1.3.5}{16a^7} + \ldots,$$

où

$$\varphi(a) = \int_0^a e^{x^2}dx.$$

La série considérée est divergente; mais la formule (1) a un sens précis, pourvu qu'on la regarde comme une manière symbolique d'exprimer que, pour $a = \infty$, on a

$$\lim a e^{-a^2}\varphi(a) = \frac{1}{2},$$

$$\lim a^3\left[e^{-a^2}\varphi(a) - \frac{1}{2a}\right] = \frac{1}{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'étude du développement (1) et de l'utilité qu'il présente pour le calcul de l'intégrale $\int_0^a e^{x^2}dx$ est faite en utilisant la notion de Cauchy de la *valeur principale* d'une intégrale définie portant sur une fonction qui de-

vient infinie entre les limites d'intégration. Stieltjes ajoute que, dans cette occasion, il lui semble qu'on pourrait difficilement atteindre le but d'une autre manière et il pense avoir ainsi montré l'utilité et même la nécessité de l'introduction de la conception de Cauchy.

52. *Sur les séries qui procèdent suivant les puissances d'une variable* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CIII, p. 1243-1246; 20 décembre 1886).

Si l'on considère la fonction $f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$, représentée entre $x = 0$ et $x = 1$ par une série que l'on sait être convergente pour $x = 1$, on doit prendre, comme définition de $f'(1)$:

$$f'(1) = \lim_{x=1} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}.$$

Stieltjes montre que $f'(1)$ n'existe pas nécessairement en considérant la fonction particulière suivante

$$f(x) = (1 - x) \sin \left(\log \frac{1}{1 - x} \right)$$

et il pose ensuite la question suivante :

Supposons que $f'(1)$ existe et ait une valeur finie, peut-on en conclure que

$$\lim_{x=1} f'(x) = f'(1)?$$

La réponse est affirmative lorsque la série $\sum_{1}^{\infty} s_n$, où $s_k = \sum_{k}^{\infty} a_n$, est convergente, ainsi qu'il résulte d'une proposition de M. Frobenius dont il a été déjà question dans le Travail *Over eenige theorema's omtrent oneindige reeksen* (n° 6).

53. *Sur les racines de l'équation* $X_n = 0$ (Acta Mathematica, t. IX, p. 385-400; 1887).

Stieltjes retrouve les limitations obtenues par MM. Bruns (¹) et Markoff (²) pour les racines de l'équation $X_n = 0$; sa démonstration est

(¹) H. Bruns, *Zur Theorie der Kugelfunctionen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XC, p. 322; 1881).

(²) A. Markoff, *Sur les racines de certaines équations* (*Mathematische Annalen*, t. XXVII, p. 177; 1886).

fondée sur le théorème d'Algèbre suivant qu'il montre ensuite comme étroitement lié à une question qui se présente dans le problème de la distribution d'électricité sur un système de conducteurs.

Soit

$$X = \sum_1^m \sum_1^m a_{ik} x_i x_k$$

une forme quadratique *positive* dans laquelle les coefficients $a_{ik} (i \gtrless k)$ sont tous négatifs ou nuls. Si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ sont des quantités toutes positives ou nulles, aucune des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, tirées des équations

$$\frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial x_i} = \xi_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

ne peut être négative, et si les quantités ξ_i sont toutes positives, il en est de même des x_i. De plus, aucun des mineurs D_{ik} du déterminant D de X ne peut être négatif.

54. *Exemple d'une fonction qui n'existe qu'à l'intérieur d'un cercle* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. XI, p. 46-51; 1887).

Considérons une suite infinie de quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, dont le module est égal à l'unité et choisies de la façon suivante. Soit C la circonférence de rayon 1 ayant l'origine pour centre et sur laquelle se trouvent les points $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ qui représentent les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; prenons a_1, a_2 de manière que P_1, P_2 se trouvent aux extrémités d'un diamètre de C; choisissons ensuite a_3, a_4 de manière que la circonférence C se trouve divisée en quatre parties égales par les points P_1, P_2, P_3, P_4, et généralement, pour $k = 2^{n-1}$, prenons

$$a_{k+1}, \quad a_{k+2}, \quad \ldots, \quad a_{2k}$$

de manière que la circonférence C se trouve divisée en $2k$ parties égales par les points $P_1, P_2, \ldots, P_{2k}$.

Cela posé, la fonction considérée par Stieltjes est définie par la série

$$f(z) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^3} \frac{z}{a_n - z},$$

qui est convergente lorsque le module de z est inférieur à 1; quel que soit

vient infinie entre les limites d'intégration. Stieltjes ajoute que, dans cette occasion, il lui semble qu'on pourrait difficilement atteindre le but d'une autre manière et il pense avoir ainsi montré l'utilité et même la nécessité de l'introduction de la conception de Cauchy.

52. *Sur les séries qui procèdent suivant les puissances d'une variable* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CIII, p. 1243-1246; 20 décembre 1886).

Si l'on considère la fonction $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, représentée entre $x = 0$ et $x = 1$ par une série que l'on sait être convergente pour $x = 1$, on doit prendre, comme définition de $f'(1)$:

$$f'(1) = \lim_{x=1} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}.$$

Stieltjes montre que $f'(1)$ n'existe pas nécessairement en considérant fonction particulière suivante

$$f(x) = (1 - x) \sin\left(\log \frac{1}{1 - x}\right)$$

et il pose ensuite la question suivante :

Supposons que $f'(1)$ existe et ait une valeur finie, peut-on en con que

$$\lim_{x=1} f'(x) = f'(1) ?$$

La réponse est affirmative lorsque la série $\sum_1^\infty s_n$, où $s_k = \sum_k^\infty a_n$, vergente, ainsi qu'il résulte d'une proposition de M. Frobenius don déjà question dans le Travail *Over eenige theorema's omtrent o reeksen* (n° 6).

53. *Sur les racines de l'équation* $X_n = 0$ (Acta Mathema p. 385-400; 1887).

Stieltjes retrouve les limitations obtenues par MM. I' Markoff (²) pour les racines de l'équation $X_n = 0$; sa démo

(¹) H. Bruns, *Zur Theorie der Kugelfunctionen* (*Journal für die wandte Mathematik*, t. XC, p. 322; 1881).
(²) A. Markoff, *Sur les racines de certaines équations* (*Mathem* t. XXVII, p. 177; 1886).

doivent, dans la Table donnée par Legendre avec 16 décimales, recevoir une correction de la dernière (seizième) décimale.

Stieltjes a mis à profit ses résultats pour calculer la constante eulérienne dont il a obtenu la valeur avec 33 décimales.

57. *Sur les maxima et minima d'une fonction étendue sur une surface fermée* (Association française pour l'avancement des Sciences, 16e session, Toulouse, Ire Partie, p. 168; 1887).

Généralisation d'un résultat qui se déduit d'un Article de M. Reech. Pour une surface fermée quelconque, $2k+1$ fois connexe, on trouve $2-2k$ pour la différence entre le nombre des maxima et minima et le nombre des cols.

58. *Sur une généralisation de la formule des accroissements finis* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. VII, p. 26-31; 1888).

Ce Travail se rapporte à un théorème donné par M. Schwarz [1] et démontré par lui au moyen du Calcul intégral; Stieltjes a cherché si l'on ne pouvait pas arriver au but d'une manière plus élémentaire et il y parvient au moyen du lemme déjà utilisé dans le Mémoire *Over Lagrange's interpolatie-formule* (n° 4); il est ainsi conduit à énoncer la proposition suivante :

Soient $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, $k(u)$ des fonctions de u que, pour fixer les idées, nous prenons en nombre égal à 4; supposons que ces fonctions admettent des dérivées premières, secondes et troisièmes dans un intervalle; si x, y, z, t sont quatre valeurs appartenant à cet intervalle, on a

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(t) & g(t) & h(t) & k(t) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{1!\,2!\,3!} \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix},$$

[1] A. SCHWARZ, *Verallgemeinerung eines analytischen Fundamentalsatzes* (*Annali di Matematica*, 2e série, t. X, p. 129).

où $\xi = (x, y)$, $\eta = (x, y, z)$, $\zeta = (x, y, z, t)$, en désignant par $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ un nombre compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

La démonstration de cette proposition suppose seulement que les fonctions f'', g'', ... admettent des dérivées f''', g''', .. ; si l'on suppose de plus que les fonctions f''', g''', ... sont continues pour la valeur a, on obtient, lorsque x, y, z, t tendent vers la même limite a,

$$(2) \qquad \lim A = \frac{1}{1!\,2!\,3!} \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) & k(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) & k'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) & k''(a) \\ f'''(a) & g'''(a) & h'''(a) & k'''(a) \end{vmatrix}$$

en désignant par A le premier membre de la formule (1).

59. *Sur une généralisation de la formule des accroissements finis* (Bulletin de la Société mathématique, t. XVI, p. 100-113; 1888).

Dans ce Travail, plus complet que le précédent, et où il conserve les mêmes notations, Stieltjes reprend d'abord la démonstration des formules (1) et (2) qui y étaient établies. Se plaçant ensuite dans un ordre d'idées analogue à celui qui est suivi dans le Mémoire *Eenige bemerkingen omtrent de differentiaalquotienten van eene functie van eene veranderlijke* (n° 5), il considère le cas où les nombres x, y, z, t tendent vers leur limite commune a, de telle façon que a ne soit jamais en dehors de l'intervalle compris entre le plus petit et le plus grand des nombres x, y, z, t et il démontre que la formule (2) subsiste alors sous des conditions bien plus larges, relatives aux fonctions $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, $k(u)$ qui sont supposées toujours admettre des dérivées du premier et du second ordre; il suffit, en effet, que leurs dérivées du troisième ordre existent seulement pour la valeur particulière a de la variable.

La remarque précédente qui s'applique, quel que soit le nombre, supérieur à deux, des fonctions que l'on considère, permet, ainsi que l'indique en terminant Stieltjes, d'énoncer des propriétés relatives à l'existence du plan osculateur considéré comme la position limite d'un plan passant par un point de la courbe et par deux autres points infiniment voisins du premier, du cercle osculateur, de la sphère osculatrice, ... lorsqu'on adopte pour ces éléments une définition analogue.

60. *Note sur l'intégrale* $\int_a^b f(x) G(x)\,dx$ (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. VII, p. 161-171; 1888).

Stieltjes établit la proposition suivante, dont la démonstration se relie à des recherches précédentes (nos 18, 19, 31) :

Soit $f(x)$ une fonction non décroissante entre les limites $x = a$ et $x = b\,(a < b)$. Alors il est toujours possible de déterminer

$$n \text{ constantes } x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \qquad (a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < b)$$

et $n+1$ constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ qui sont comprises respectivement dans les $n+1$ intervalles formés par les $n+2$ quantités

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, \qquad f(x_{n-1}), f(x_n), f(b),$$

de telle façon qu'on ait

$$\int_a^b f(x) G_{2n}(x)\,dx = a_1 \int_a^{x_1} G_{2n}(x)\,dx + a_2 \int_{x_1}^{x_2} G_{2n}(x)\,dx + \ldots \\ + a_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} G_{2n}(x)\,dx + a_{n+1} \int_{x_n}^{b} G_{2n}(x)\,dx,$$

$G_{2n}(x)$ étant un polynome quelconque en x du degré $2n$ au plus.

61. *Sur l'équation d'Euler* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. XII, p. 222-227; 1888).

L'intégrale générale de l'équation

$$(1) \qquad \frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

où

$$X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4,$$
$$Y = a_0 y^4 + 4a_1 y^3 + 6a_2 y^2 + 4a_3 y + a_4,$$

peut se mettre sous la forme élégante

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{x+y}{2} & xy \\ 1 & a_0 & a_1 & a_2 - 2m \\ -\frac{x+y}{2} & a_1 & a_2 + m & a_3 \\ xy & a_2 - 2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

m étant la constante arbitraire.

Après avoir montré comment cette formule, qui semble nouvelle, résulte facilement d'un Mémoire de Richelot [1], Stieltjes remarque que si l'on détermine la constante m par l'équation

$$(3)\qquad 4m^3 - Sm - T = 0,$$

où S et T sont les invariants de X, le premier membre de (2) est un carré parfait et l'on satisfait ainsi à l'équation différentielle (1) par trois relations de la forme

$$p + qx + ry + sxy = 0,$$

auxquelles il faut joindre la relation évidente $x - y = 0$. Pour parler autrement, on a quatre substitutions linéaires qui transforment en elle-même la différentielle elliptique $\frac{dx}{\sqrt{X}}$; l'une d'elles est $x = y$; les trois autres sont définies par

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_1 \\ -\frac{x+y}{2} & a_1 & a_2 - m \\ xy & a_2 - 2m & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où m doit être remplacé successivement par les racines de l'équation (3).

Soit H le hessien de X; si l'on pose $y = x$ dans le premier membre de (2) changé de signe, on obtient $H + mX$ qui devient un carré parfait si l'on prend pour m une racine de l'équation (3); Stieltjes énonce en conséquence la proposition suivante :

Soit $\alpha x^2 - 2\beta x - \gamma$ un polynome du second degré, qui ne diffère que par un facteur constant de $\sqrt{H - mX}$; alors, en posant

$$\alpha xy - \beta(x + y) - \gamma = 0,$$

on aura une substitution linéaire qui transforme en elle-même la différentielle elliptique $\frac{dx}{\sqrt{X}}$.

Une remarque de Halphen conduit enfin Stieltjes à écrire la relation (2) sous la forme

$$h - mf - (\tfrac{1}{4}S - m^2)(x - y)^2 = 0$$

[1] RICHELOT, *Einige Bemerkungen zum Eulerschen Additionstheorem der elliptischen Integrale* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XLIV, p. 277; 1852).

due à Cayley et retrouvée par Laguerre, et dans laquelle h et f sont les secondes polaires de H et de X respectivement.

62. *Sur l'équation d'Euler* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CVII, p. 617; 15 octobre 1888).

Extrait de l'Article précédent portant le même titre.

63. *Sur la réduction de la différentielle elliptique à la forme normale* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CVII, p. 651; 22 octobre 1888).

Stieltjes présente la réduction de la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (X = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4),$$

à la forme normale

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - Sy - T}},$$

où S et T sont les invariants de X, sous la forme suivante :

L'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - Sy - T}}$$

est donnée par la relation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & x & 0 & \frac{1}{2}y & -xy \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & c \\ x & 0 & 0 & -2 & c & 0 \\ 0 & 0 & -2 & a_0 & a_1 & a_2 \\ \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2} & c & a_1 & a_2 & a_3 \\ -xy & c & 0 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

c désignant la constante arbitraire.

La formule (1) donne immédiatement les substitutions linéaires qui permettent d'effectuer la réduction; si l'on détermine, en effet, c par l'équation

$$a_0c^4 + 4a_1c^3 + 6a_2c^2 + 4a_3c + a_4 = 0,$$

le premier membre de (1) est un carré parfait.

φ''^2_y, φ'''^2_y; cela posé, Stieltjes obtient le résultat suivant qui donne la solution du problème qu'il a en vue.

L'expression

$$(u'' - u''')\varphi'_x\varphi'_y + (u''' - u')\varphi''_x\varphi''_y + (u' - u'')\varphi'''_x\varphi'''_y$$

est, sauf un facteur constant, le carré de l'un des facteurs de $XH_y - YH_x$.

Appliquant ces résultats à l'équation d'Euler, il parvient ensuite à la proposition suivante :

Les intégrales linéaires, autres que $x - y = 0$, de l'équation différentielle

$$(3)\qquad \frac{dx^2}{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4} = \frac{dy^2}{a_0y^4 + 4a_1y^3 + 6a_2y^2 + 4a_3y + a_4}$$

s'obtiennent en posant

$$(4)\qquad h + uf + (\tfrac{1}{12}S - u^2)(x - y)^2 = 0,$$

où h et f sont les secondes polaires de H_x et de X et où u doit être remplacé successivement par les racines u', u'', u''' de l'équation (2). Sauf un facteur constant, le premier membre de (4) est alors un carré exact et la relation entre x et y se réduit bien à la forme (1).

Ce résultat peut s'obtenir en partant de la forme donnée (n° 61) par Cayley et Laguerre à l'intégrale générale de l'équation d'Euler, savoir

$$(5)\qquad h + Cf + (\tfrac{1}{12}S - C^2)(x - y)^2 = 0,$$

que l'on obtient en remplaçant, dans (4), u par la constante arbitraire C.

Stieltjes remarque que, en considérant C comme une variable, y comme une constante arbitraire, la relation (5) est l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm\frac{dC}{\sqrt{4C^3 - SC - T}}$$

et que, pour avoir les intégrales linéaires de cette équation, il suffit de résoudre l'équation $X = 0$. C'est, on le voit, le résultat présenté sous une autre forme dans la Note : *Sur la réduction de la différentielle elliptique à la forme normale* analysée précédemment (n° 63).

L'examen des cas particuliers, qu'il vient de traiter, amène Stieltjes à prévoir une liaison intime entre la recherche des intégrales linéaires de

l'équation (3) et l'intégration générale de cette équation. Cette étude est renvoyée à une seconde Partie qui n'a pas paru.

65. *Sur le développement de l'expression*

$$\{R^2 - 2Rr[\cos u \cos u' \cos(x-x') + \sin u \sin u' \cos(y-y')] + r^2\}^{-1}$$

(Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4e série, t. V, p. 55-65; 1889).

La plus grande partie de ce Mémoire est consacrée au développement de la première (n° 11) des Notes : *Sur un théorème de M. Tisserand,* qui ont été signalées précédemment et où Stieltjes montre que c'est dans l'extension de la théorie du potentiel au cas de quatre variables, que l'on doit chercher la véritable origine du beau résultat obtenu par M. Tisserand, dans ses recherches sur le développement de la fonction perturbatrice, lorsque l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable.

La démonstration de Stieltjes est reproduite dans le *Traité de Mécanique céleste* de M. Tisserand (t. I, p. 448 et suiv.), et il nous suffira de transcrire le résultat de son analyse.

Soit

$$\cos\varphi = \cos u \cos u' \cos(x-x') + \sin u \sin u' \cos(y-y');$$

on a

$$\{R^2 - 2Rr[\cos u \cos u' \cos(x-x') + \sin u \sin u' \cos(y-y')] + r^2\}^{-1} = \sum_0^\infty V_n \frac{r^n}{R^{n+2}},$$

$$V_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = \sum_i{}' \sum_k{}' 4 c_{i,k}^n (\cos u \cos u')^i (\sin u \sin u')^k$$
$$\times F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u) F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u') \cos i(x-x') \cos k(y-y'),$$

où l'on pose

$$\alpha = \frac{i+k-n}{2}, \qquad \beta = \frac{i+k+n}{2}, \qquad \gamma = k+1,$$

$$c_{i,k}^n = \frac{\Pi\left(\frac{n-i+k}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+i+k}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-i-k}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+i-k}{2}\right)\Pi(k)\,\Pi(k)},$$

En posant, dans ces formules, $u = u' = \frac{J}{2}$, $x' = 0$, $y' = 0$, on retrouve la formule spéciale obtenue, pour la première fois, par M. Tisserand.

Stieltjes termine son Mémoire en appelant l'attention sur la formule

$$\cos n\theta = n \sum_i{}' 2 \frac{\Pi(n-i-1)}{\Pi(n-i)\,\Pi(2i)} \sin^{2i} u \times F(i-n, i-n, 2i-1, \sin^2 u) \cos i\psi,$$

où

$$\cos\theta = \cos^2 u - \sin^2 u \cos\psi,$$

et sur la suivante due à Hansen

$$\begin{aligned} &X_n(\cos^2 u \cos x - \sin^2 u \cos y) \\ &\quad = \sum_k{}' \sum_i{}' 4 c^n_{i,k} \cos^{2i} u \sin^{2k} u\, F(i-k-n, i-k-n-1, 2k-1, \sin^2 u) \cos ix \cos kx, \end{aligned}$$

et en posant la question de savoir s'il ne serait pas possible d'arriver à ces résultats par une théorie analogue à celle du potentiel.

66. *Sur les dérivées de* séc x (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CVIII, p. 605-607; 25 mars 1889).

Les résultats contenus dans cette Note sont développés et complétés dans le Mémoire : *Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable,* qui sera analysé plus loin (n° 68).

67. *Sur un développement en fraction continue* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CVIII, p. 1297-1298; 24 juin 1889).

Le Mémoire : *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques* (n° 31) a, comme on sait, et ainsi qu'on l'a rappelé partiellement dans la Note : *Sur un développement en fraction continue* (n° 32), un rapport intime avec un certain développement en fraction continue. C'est la question de la convergence de cette fraction continue qui est envisagée ici ; les résultats qui sont énoncés sont développés et étendus dans le grand Mémoire : *Recherches sur les fractions continues* (n° 82).

68. *Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. III, p. H.1; 1889).

Stieltjes propose, pour le problème de la transformation de la série

$$\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} - \ldots + (-1)^n \frac{a_n}{x^{n+1}} + \ldots,$$

dans l'une des fractions continues,

$$c_0 : x + c_1 : 1 + c_2 : x + c_3 : 1 + \ldots + c_{2n-1} : 1 + c_{2n} : x + \ldots,$$
$$c_0 : (x + c_1) - c_1 c_2 : (x + c_2 + c_3) - c_3 c_4 : (x + c_4 + c_5) - \ldots,$$

une solution nouvelle basée sur les deux théorèmes suivants :

1° *Considérons une série de quantités $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ déterminées par les formules*

$$\alpha_{0,0} = 1,$$
$$\alpha_{i,k} = 0, \quad \text{lorsque} \quad i > k,$$
$$\beta_{i,k} = 0, \quad \text{lorsque} \quad i > k,$$
$$\beta_{i,k} = \alpha_{i,k} + c_{2i+2}\alpha_{i+1,k},$$
$$\alpha_{i,k+1} = c_{2i+1}\beta_{i,k} + \beta_{i-1,k};$$

la forme quadratique à une infinité de variables

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k$$

est égale à

$$\begin{aligned} & c_0[\alpha_{0,0} X_0 + \alpha_{0,1} X_1 + \alpha_{0,2} X_2 + \alpha_{0,3} X_3 + \ldots]^2 \\ & + c_0 c_1 c_2 [\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,3} X_3 + \ldots]^2 \\ & + c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 [\alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,3} X_3 + \ldots]^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, de même, la forme quadratique

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k+1} X_i X_k$$

est égale à

$$\begin{aligned} & c_0 c_1 [\beta_{0,0} X_0 + \beta_{0,1} X_1 + \beta_{0,2} X_2 + \beta_{0,3} X_3 + \ldots]^2 \\ & + c_0 c_1 c_2 c_3 [\beta_{1,1} X_1 + \beta_{1,2} X_2 + \beta_{1,3} X_3 + \ldots]^2 \\ & + c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 [\beta_{2,2} X_2 + \beta_{2,3} X_3 + \ldots]^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

2° *Si l'on a identiquement*

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k = \varepsilon_0[X_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots]^2 + \varepsilon_1[X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots]^2 + \ldots$$

on a, en même temps :

$$\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} - \frac{a_3}{x^4} + \ldots$$
$$= \varepsilon_0 : (x + \alpha_1) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} : (x + \beta_2 - \alpha_1) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} : (x + \gamma_3 - \beta_2) - \ldots.$$

Comme applications des propositions précédentes, Stieltjes donne les développements en fractions continues des quatre expressions que l'on obtient en remplaçant, dans l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(z) e^{-xz} dz,$$

la fonction $\varphi(z)$ successivement par les quatre valeurs particulières

$$\left(\frac{2}{e^z + e^{-z}}\right)^k, \quad \operatorname{sn} z, \quad \operatorname{cn} z, \quad \operatorname{dn} z.$$

On trouvera, dans l'Introduction et dans les n°s 82 et suivants du Mémoire *Recherches sur les fractions continues*, la démonstration de ce point que les trois dernières des fractions continues ainsi obtenues sont convergentes et représentent effectivement les intégrales qui leur ont donné naissance.

69. *Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. XIII, Ire Partie, p. 170-172, 1889).

Stieltjes indique, de la formule de M. Hermite

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\psi(x,y)} \, dx \, dy = \frac{\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{b}{\sqrt{ac}}\right)}{2\sqrt{ac - b^2}}$$

où

$$\psi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

une démonstration à laquelle il a été conduit par cette remarque que l'angle arc cos $\left(\frac{b}{\sqrt{ac}}\right)$ qui y figure et qui est compris entre o et π, est précisément l'angle qu'on rencontre en représentant géométriquement la forme positive $\psi(x, y)$.

La méthode s'applique avec la même facilité au cas de trois variables et

le conduit à la détermination de

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\psi(x,y,z)}\,dx\,dy\,dz,$$

où ψ désigne une forme quadratique des trois variables x, y, z.

70. *Sur un passage de la théorie analytique de la chaleur* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3ᵉ série, t. VIII, p. 472; 1889).

Stieltjes montre que la méthode suivie par Fourier pour obtenir le développement

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \ldots,$$

valable pour x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, méthode qui manque de rigueur, conduit à un résultat exact. Le procédé employé permet d'obtenir d'une façon analogue le développement

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x - \ldots.$$

71. *Sur le développement de* $\log\Gamma(a)$ (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4ᵉ série, t. V, p. 425-444; 1889).

Le but principal de ce Travail, dit Stieltjes, est de donner une nouvelle démonstration de la formule de Stirling

$$\log\Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{B_1}{1.2.a} - \frac{B_2}{3.4.a^3} + \ldots,$$

et de montrer que le second membre représente asymptotiquement la valeur de $\log\Gamma(a)$ (dans un sens qui est précisé), même dans le cas où la valeur de a est imaginaire, la partie réelle de a étant négative.

Les intégrales définies qui avaient été introduites dans cette théorie présentent toutes cette particularité qu'elles n'ont un sens qu'en supposant la partie réelle de a positive; Stieltjes se propose de lever cette restriction qui n'est pas dans la nature des choses et de mettre en évidence des intégrales valables dans tout le plan.

Adoptant, comme définition de $\Gamma(a)$, la formule

$$\Gamma(a) = \lim_{n=\infty} \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}\,n^a,$$

il considère la branche particulière de $\log \Gamma(a)$ définie, en supposant que $\log \Gamma(a)$ est réel lorsque a est réel et positif et en limitant la marche de la variable par une coupure tracée le long de l'axe des x, de o à $-\infty$.

Posant

$$J(a) = \int_0^\infty \frac{P(x)}{x+a}\, dx,$$

où $P(x)$ désigne une fonction de la variable réelle x définie par les relations

$$P(x) = \frac{1}{2} - x, \qquad 0 < x < 1,$$
$$P(x+1) = P(x),$$

Stieltjes établit la formule suivante

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a - a + \frac{1}{2} \log(2\pi) + J(a),$$

qu'il attribue à M. Bourget, et où l'on considère la fonction $\log a$ en limitant la marche de la variable comme dans le cas de $\log \Gamma(a)$.

Cette formule, qui lui sert de point de départ, ne se distingue de celle qui est employée ordinairement que par la forme sous laquelle se présente la fonction $J(a)$.

Après avoir montré que, lorsque a croît indéfiniment, $J(a)$ tend, en général, vers zéro et étudié le développement de $J(a)$ suivant les puissances descendantes de a, il passe à des applications de formules importantes relatives à une fonction $f(z)$ uniforme dans la région du plan située à droite de l'axe des y, n'ayant dans ce domaine ni pôles, ni points singuliers essentiels et telle que l'on ait

$$\lim \int \operatorname{mod} \frac{f(z)}{z^2}\, dz = \lim \frac{1}{R^2} \int \operatorname{mod} f(z)\, dz = 0, \qquad R = \infty,$$

l'intégrale étant prise le long du demi-cercle de rayon R ayant pour centre l'origine et situé à droite de l'axe des y; on a alors, la partie réelle de a étant positive,

$$f(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a f(ui)}{a^2 + u^2}\, du,$$

et si la fonction $f(z)$ prend des valeurs conjuguées pour des valeurs con-

juguées de la variable

$$f(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{aA}{a^2 + u^2} du,$$

en désignant par A la partie réelle de $f(ui)$.

Ces formules et d'autres semblables conduisent, comme application, à la formule de Binet relative à $J(a)$ et à des développements analogues à la série de Stirling.

72. *Sur la fonction exponentielle* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CX, p. 267-270; 10 février 1890).

Prenant comme point de départ des résultats obtenus par M. Hermite dans le Mémoire classique (¹) *Sur la fonction exponentielle*, Stieltjes parvient à une démonstration très simple de l'impossibilité d'une relation de la forme

$$N + e^a N_1 + e^b N_2 + \ldots + e^h N_n = 0,$$

où les exposants $a, b, \ldots, h$ ainsi que les coefficients $N, N_1, \ldots, N_n$ sont des nombres entiers.

73. *Sur la valeur asymptotique des polynomes de Legendre* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CX, p. 1026-1027; 19 mai 1890).

Extrait du Mémoire : *Sur les polynomes de Legendre*, n° 74.

74. *Sur les polynomes de Legendre* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. IV, p. G.1; 1890).

M. Darboux a donné (²) une formule qui permet d'obtenir une expression approchée de $X_n(\cos\theta)$, l'erreur commise étant de l'ordre d'une puissance aussi grande qu'on le voudra de $\frac{1}{n}$. Stieltjes développe ici un résultat

---

(¹) CH. HERMITE, *Sur la fonction exponentielle* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVII, p. 18, 74, 226 et 285; 1873).

(²) G. DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3ᵉ série, t. IV, p. 5; 1878).

plus complet; posant

$$o < \theta < \pi, \qquad \alpha = \theta - \frac{\pi}{2}, \qquad C_n = \frac{4}{\pi}\,\frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)},$$

il trouve qu'on peut exprimer $X_n(\cos\theta)$ par la série

$$(1) \quad X_n(\cos\theta) = C_n\left[\frac{\cos(n\theta+\frac{1}{2}\alpha)}{\sqrt{2\sin\theta}} + \frac{1^2}{2(2n+3)}\,\frac{\cos(n\theta+\frac{3}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\theta)^3}} + \frac{1^2.3^2}{2.4.(2n+3)(2n+5)}\,\frac{\cos(n\theta+\frac{5}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\theta)^5}} + \ldots\right],$$

qui est convergente tant que θ appartient à l'intervalle $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$. C'est seulement en dehors de cet intervalle que la série précédente prend le caractère d'une simple expression asymptotique; mais, même dans ce cas, Stieltjes obtient une limite très simple de l'erreur commise en s'arrêtant à un nombre fini de termes par la proposition suivante :

Soit M un facteur numérique, compris entre 1 et 2, et défini en posant

$$M = \frac{1}{|\cos\theta|} \quad \text{lorsque} \quad \sin^2\theta \leq \frac{1}{2},$$
$$M = 2\sin\theta \quad \text{lorsque} \quad \sin^2\theta \geq \tfrac{1}{2};$$

l'erreur commise en prenant la somme des p premiers termes du développement (1) est inférieure, en valeur absolue, à M fois le terme suivant dans lequel on aurait remplacé d'abord par l'unité, le cosinus qui y figure au numérateur.

Les propositions précédentes conduisent Stieltjes à plusieurs résultats intéressants dont certains avaient été déjà l'objet des recherches de Poisson, de MM. Bruns et Heine; il retrouve en particulier la limitation de M. Bruns, déjà considérée dans le Mémoire *Sur les racines de l'équation* $X_n = 0$ (n° 53), des racines du polynome X_n de Legendre.

75. *Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. IV, p. J.1; 1890).

Soit $F(x) = X_n$ le polynome de Legendre du degré n, et $R(x)$ la partie entière du produit

$$F(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right);$$

posons

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} F(x) \log \frac{x+1}{x-1} - R(x), \qquad \text{si} \qquad |x| > 1,$$

et

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} F(x) \log \frac{1+x}{1-x} - R(x), \qquad \text{si} \qquad |x| < 1,$$

Ces expressions représentent dans tout le plan, sauf sur la circonférence de rayon égal à l'unité et dont le centre est à l'origine, ce que Heine nomme la *fonction sphérique de seconde espèce.*

Considérons, par exemple, le cas où le module de x est supérieur à 1; M. Hermite, effectuant le changement de variable défini en posant

$$\frac{x+1}{x-1} = e^z,$$

avait obtenu [1] la distribution des racines de l'équation

$$(e^z - 1)^n \left[\frac{1}{2} z F\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right) - R\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right) \right] = 0$$

sur le plan des z.

Stieltjes, après avoir déduit des résultats obtenus par M. Hermite et qui se rapportent au plan des z les propositions équivalentes relatives au plan des x, établit ces dernières par une méthode directe.

76. *Note sur l'intégrale* $\int_0^\infty e^{-u^2} du$ (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, t. IX, p. 479-480; 1890).

M. Méray a montré [2] que l'on peut déduire la formule

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

---

(1) CH. HERMITE, *Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV, p. I.1; 1890).

(2) CH. MÉRAY, *Valeur de l'intégrale définie* $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ *déduite de la formule de Wallis* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XII, Ire Partie, p. 174; 1888).

de celle de Wallis; Stieltjes propose ici, pour le même but, une démonstration plus simple.

77. *Sur la théorie des nombres* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. IV, p. 1-103; 1890).

Cette étude bibliographique renferme les trois premiers Chapitres d'un Travail étendu que Stieltjes se proposait de publier sur la théorie des nombres et qui aurait constitué une œuvre capitale.

Le premier Chapitre traite de la divisibilité des nombres; le deuxième et le troisième, consacrés aux propositions générales sur les congruences, aux matrices, aux équations linéaires indéterminées, aux systèmes de congruences linéaires, renferment des propositions importantes de MM. Hermite, Smith et Frobenius.

78. *Sur quelques intégrales définies et leur développement en fractions continues* (The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, t. XXIV, p. 370-382; 1890).

Les intégrales considérées ici rentrent dans la même forme générale que celles qui ont été envisagées dans le Mémoire : *Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable* (nº 68); elles s'obtiennent en adoptant successivement dans l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(u) e^{-xu} du,$$

des expressions particulières pour la fonction $\varphi(u)$.

Les développements en fractions continues correspondants sont donnés encore en se plaçant au point de vue purement formel; on trouvera dans le Mémoire : *Recherches sur les fractions continues*, et pour des cas particuliers des exemples considérés ici, la démonstration de ce point que les fractions continues obtenues sont convergentes et représentent effectivement les intégrales qui leur ont donné naissance.

79. *Note sur quelques fractions continues* (The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, t. XXV, p. 198-200; 1891).

On doit à M. Hermite (¹) le résultat élégant exprimé par la formule

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\varepsilon)}},$$

où ε désigne un nombre compris entre o et $\frac{1}{2}$.

Stieltjes trouve qu'en posant

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n \varphi(n)}},$$

$\varphi(n)$ peut s'exprimer par une fraction continue convergente d'une loi très simple; la démonstration de ce résultat est reliée à un développement en fraction continue, qui se déduit ainsi qu'un autre développement semblable des formules données dans l'Article : *Sur quelques intégrales définies et leur développement en fractions continues* (n° 78).

80. *Sur une application des fractions continues* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CXVIII, p. 1315; 11 juin 1894).

Les résultats de cette Communication sont développés dans le Mémoire : *Recherches sur les fractions continues* (n° 82) et, en particulier, dans la Note annexée à ce Mémoire.

81. *Recherches sur les fractions continues* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CXVIII, p. 1401; 18 juin 1894).

Extrait du Mémoire suivant (n° 82).

82. *Recherches sur les fractions continues* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. VIII, p. J.1, t. IX, p. A.1; 1894-1895).

Nous avons eu, au commencement de cette Notice, l'occasion de citer le Rapport élogieux de M. Poincaré sur ces recherches qui trouvent leur origine, ainsi que nous l'avons déjà dit, dans un Travail publié dix ans auparavant, en 1884. Ce n'est que peu de temps avant sa mort, que Stieltjes, par la découverte d'un théorème remarquable de la théorie générale des fonctions, a pu considérer comme atteint le but vers lequel tendaient ses

(¹) Ch. Hermite, *Cours de la Faculté des Sciences de Paris*, p. 116, 4ᵉ édition; 1891.

efforts; ses amis savent quelle grande joie il en ressentit et l'on s'explique ainsi, dans une certaine mesure, comment, accablé par la maladie, il a pu la dompter pendant quelque temps et avoir la force d'écrire et de publier son beau et dernier Travail.

Le lecteur acquerra une idée d'ensemble très nette de ce Mémoire, en consultant le Rapport de M. Poincaré et l'extrait cité précédemment (n° 81); il retrouvera ensuite, en lisant les *Recherches sur les fractions continues*, toutes les qualités d'élégance, de clarté, de profonde et puissante originalité, qui caractérisent l'œuvre entière de Stieltjes.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

RECHERCHES

SUR

LES FRACTIONS CONTINUES

[SUITE ET FIN (1)],

PAR M. T.-J. STIELTJES,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

CHAPITRE IX.

ÉTUDE DE TROIS CAS PARTICULIERS. SUR LE PROBLÈME DES MOMENTS DANS LE CAS INDÉTERMINÉ.

66. Le résultat auquel nous sommes arrivé dans le n° 47 est parfaitement général et embrasse tous les cas possibles. Cependant, il peut arriver que la fonction $\Phi(u)$ prenne une forme particulière : c'est ce qui arrive déjà dans le cas où la fraction continue est oscillante. Nous allons étudier ici quelques nouveaux cas de ce genre.

Supposons $z = x$ réel positif; dans quels cas $P_{2n}(x)$ et $Q_{2n}(x)$ tendent-ils vers une limite finie pour $n = \infty$? Puisque

$$Q_{2n}(x) = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 x + \ldots + \mathfrak{B}_n x^n,$$

$$\mathfrak{B}_0 = 1,$$

$$\mathfrak{B}_1 = \sum_1^n (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1}) a_{2k},$$

(1) *Voir* tome VIII, p. J.1.

il *faut* certainement que $\mathfrak{M}_1$ reste fini : la série

$$\sigma = \sum_1^{\infty} (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1}) a_{2k}$$

doit être *convergente*. Mais cette condition nécessaire est aussi suffisante, car, puisque les racines de $Q_{2n}(z) = 0$ sont réelles et négatives, on a

$$Q_{2n}(x) < \left(1 + \frac{\mathfrak{M}_1 x}{n}\right)^n < e^{\mathfrak{M}_1 x} < e^{\sigma x}.$$

La série σ étant convergente, il s'ensuit que la série

$$\sum_1^{\infty} a_{2k}$$

est aussi convergente. Quant à la série

$$\sum_1^{\infty} a_{2k-1}$$

elle peut être aussi bien convergente que divergente.

Mais, dans le premier cas, on retombe sur le cas déjà examiné, où aussi

$$P_{2n+1}(x), \quad Q_{2n+1}(x)$$

restent finis. Nous aurons un cas nouveau en supposant :

1° *La série*

$$\sum_1^{\infty} a_{2k-1}$$

est divergente ;

2° *La série*

$$\sum_1^{\infty} (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1}) a_{2k}$$

est convergente.

Par des raisonnements absolument analogues à ceux développés dans le Chapitre IV, on arrivera aux conclusions suivantes.

Dans tout le plan on a

$$\lim P_{2n}(z) = \mathfrak{P}(z),$$
$$\lim Q_{2n}(z) = \mathfrak{Q}(z),$$

$\mathfrak{P}(z)$ et $\mathfrak{Q}(z)$ étant des fonctions holomorphes. Ces fonctions sont du genre

zéro et n'ont que des zéros simples, qui sont réels négatifs. On a par exemple

$$\mathfrak{Q}(z) = \left(1 + \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 + \frac{z}{\alpha_2}\right)\left(1 + \frac{z}{\alpha_3}\right)\cdots,$$

où α_k est limite de la $k^{\text{ième}}$ racine de

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

pour $n = \infty$.

La fraction continue converge vers

$$\frac{\mathfrak{P}(z)}{\mathfrak{Q}(z)} = \sum_1^\infty \frac{\gamma_k}{z + \alpha_k},$$

et la distribution (γ_k, α_k) est la solution du problème des moments qui est déterminé et n'en admet point d'autres. Puisque

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}} = \frac{a_1 z Q_0(z) + a_3 z Q_2(z) + \ldots + a_{2n+1} z Q_{2n}(z)}{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}},$$

et que $Q_{2n}(z)$ tend vers $\mathfrak{Q}(z)$ tandis que la série

$$\sum_1^\infty a_{2k-1}$$

est *divergente,* on voit facilement que

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_{2n+1}(z)}{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}} = z\,\mathfrak{Q}(z),$$

de même

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}} = z\,\mathfrak{P}(z).$$

Ainsi se vérifie donc la convergence de la fraction continue, puisqu'on a aussi

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{\mathfrak{P}(z)}{\mathfrak{Q}(z)}.$$

67. Voyons maintenant dans quel cas $P_{2n+1}(x)$ et $Q_{2n+1}(x)$ tendent

vers des limites finies. Puisque

$$P_{2n-1}(x) = \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 x + \ldots + \mathfrak{C}_n x^n,$$
$$\mathfrak{C}_0 = 1,$$
$$\mathfrak{C}_1 = \sum_1^n (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k}) a_{2k+1},$$

il faut certainement que la série

$$\sigma' = \sum_1^\infty (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k}) a_{2k+1}$$

soit convergente. Mais cette condition est aussi suffisante.

La convergence de σ' entraîne celle de

$$\sum_0^\infty a_{2k+1};$$

quant à la série

$$\sum_1^\infty a_{2k},$$

elle peut être convergente ou divergente; mais, dans le premier cas, on retombe sur un cas déjà étudié.

En supposant au contraire :

1° *La série*

$$\sum_1^\infty a_{2k}$$

est divergente;

2° *La série*

$$\sum_1^\infty (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k}) a_{2k+1}$$

est convergente.

On a un cas particulier nouveau, qui conduit aux résultats suivants.

Dans tout le plan on a

$$\lim P_{2n+1}(z) = \mathfrak{P}_1(z),$$
$$\lim Q_{2n+1}(z) = \mathfrak{Q}_1(z),$$

$\mathfrak{P}_1(z)$ et $\mathfrak{Q}_1(z)$ étant holomorphes dans tout le plan.

Ces fonctions sont du genre zéro et n'ont que des zéros simples qui sont réels négatifs. On a par exemple

$$\mathfrak{Q}_1(z) = Cz\left(1+\frac{z}{\beta_1}\right)\left(1+\frac{z}{\beta_2}\right)\left(1+\frac{z}{\beta_3}\right)\cdots,$$

où β_k est la limite de la $k^{\text{ième}}$ racine de

$$Q_{2n+1}(-z):z = 0,$$

pour $n=\infty$.

La fraction continue tend vers

$$\frac{\mathfrak{P}_1(z)}{\mathfrak{Q}_1(z)} = \frac{\delta_0}{z} + \frac{\delta_1}{z+\beta_1} + \frac{\delta_2}{z+\beta_2} + \ldots,$$

et la distribution (δ_k, β_k) $(\beta_0 = 0)$ est la solution du problème des moments.

On a ensuite

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{a_2+a_4+\ldots+a_{2n}} = \mathfrak{P}_1(z),$$

$$\lim \frac{Q_{2n}(z)}{a_2+a_4+\ldots+a_{2n}} = \mathfrak{Q}_1(z),$$

ce qui met en évidence la convergence de la fraction continue.

68. Je reprends les formules du n° 2, mais pour ordonner maintenant les polynomes P_n, Q_n suivant des puissances descendantes de la variable

$$\begin{aligned}
P_{2n}(z) &= z^{n-1}(1+\alpha z^{-1}+\alpha' z^{-2}+\ldots)\times a_2 a_3\ldots a_{2n},\\
Q_{2n}(z) &= z^{n}\quad(1+\beta z^{-1}+\beta' z^{-2}+\ldots)\times a_1 a_2\ldots a_{2n},\\
P_{2n+1}(z) &= z^{n}\quad(1+\gamma z^{-1}+\gamma' z^{-2}+\ldots)\times a_2 a_3\ldots a_{2n+1},\\
Q_{2n+1}(z) &= z^{n+1}(1+\delta z^{-1}+\delta' z^{-2}+\ldots)\times a_1 a_2\ldots a_{2n+1};
\end{aligned}$$

on aura, en introduisant les b_k,

$$\begin{aligned}
\alpha &= b_2+b_3+\ldots+b_{2n-1},\\
\beta &= b_1+b_2+\ldots+b_{2n-1},\\
\gamma &= b_2+b_3+\ldots+b_{2n},\\
\delta &= b_1+b_2+\ldots+b_{2n}.
\end{aligned}$$

Posons aussi $tz = 1$, puis

$$U_{2n} = 1 + \alpha t + \alpha' t^2 + \ldots + \alpha^{(n-2)} t^{n-1},$$
$$V_{2n} = 1 + \beta t + \beta' t^2 + \ldots + \beta^{(n-1)} t^n,$$
$$U_{2n+1} = 1 + \gamma t + \gamma' t^2 + \ldots + \gamma^{(n-1)} t^n,$$
$$V_{2n+1} = 1 + \delta t + \delta' t^2 + \ldots + \delta^{(n-1)} t^n;$$

on aura

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = b_0 t \frac{U_{2n}}{V_{2n}}, \qquad \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = b_0 t \frac{U_{2n+1}}{V_{2n+1}},$$

et il est clair que les $U_n : V_n$ sont les réduites de la fraction continue

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{b_1 t}{1 + \cfrac{b_2 t}{1 + \cfrac{b_3 t}{1 + \ldots}}}},$$

en sorte qu'on a

$$U_{n+1} = U_n + b_n t U_{n-1},$$
$$V_{n+1} = V_n + b_n t V_{n-1}.$$

En supposant donc d'abord t positif, les U_n et V_n vont en augmentant. Pour qu'ils tendent vers des limites finies, il faut évidemment que les quantités α, β, γ, δ restent finies. Cette condition revient évidemment à celle-ci : la série

$$\sum_1^\infty b_k$$

doit être *convergente*. Ensuite on reconnaît facilement que cette condition nécessaire est aussi suffisante, et qu'elle conduit à cette conséquence : pour toute valeur réelle ou imaginaire de t, on a

$$\lim_{n=\infty} U_n = u(t),$$
$$\lim_{n=\infty} V_n = v(t),$$

$u(t)$ et $v(t)$ étant deux fonctions holomorphes.

On a donc

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{1}{a_1 z} \frac{u\left(\frac{1}{z}\right)}{v\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

La fraction continue est donc convergente, et en effet il est clair que la série

$$\sum_1^\infty a_k$$

doit être *divergente*, puisque nous supposons que la série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

est *convergente*.

69. Posons $n = 2m$ ou $n = 2m+1$ selon que n est pair ou impair, on aura

$$V_n = (1 + x_1 t)(1 + x_2 t)\dots(1 + x_m t),$$

où nous supposerons

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_m;$$

ce sont là les racines de

$$Q_{2n}(-z) = 0 \quad \text{ou de} \quad Q_{2n+1}(-z) : z = 0,$$

rangées par ordre *décroissant*. Lorsque n croît, une racine x_k de rang déterminé k *croît* aussi, et elle tend pour $n = \infty$ vers une limite déterminée. Et, en effet, elle ne saurait croître indéfiniment puisque la somme de toutes les racines reste finie.

Si nous posons

$$\lim_{n=\infty} x_k = r_k,$$

on aura

$$r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \dots,$$

et deux r_k ne peuvent pas être égaux (*voir* le raisonnement du n° 20). La série

$$\sum_1^\infty r_k$$

est *convergente* et l'on a

$$\nu(t) = (1 + r_1 t)(1 + r_2 t)(1 + r_3 t)\dots.$$

Considérons la décomposition en fractions simples

$$\frac{U_n}{V_n} = C_n + \frac{\mathfrak{M}_1}{1 + x_1 t} + \frac{\mathfrak{M}_2}{1 + x_2 t} + \dots + \frac{\mathfrak{M}_m}{1 + x_m t},$$

où $C_n = 0$ lorsque n est pair, $C_{2m+1} > 0$

$$C_n + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_n = 1,$$

$$\frac{U_n}{V_n} = 1 - \sum_1^n \frac{\mathfrak{M}_k x_k t}{1 + x_k t}.$$

Pour $n = \infty$, la constante positive $\mathfrak{M}_k$ tend vers une limite s_k et l'on démontre aisément, en passant à la limite pour $n = \infty$,

$$\frac{u(t)}{v(t)} = 1 - \sum_1^\infty \frac{r_k s_k t}{1 + r_k t},$$

ou encore

$$\frac{u(t)}{v(t)} = 1 - \sum_1^\infty s_k + \sum_1^\infty \frac{s_k}{1 + r_k t},$$

en sorte qu'il vient finalement

$$\lim \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{1 - \sum_1^\infty s_k}{a_1 z} + \frac{1}{a_1} \sum_1^\infty \frac{s_k}{z + r_k}.$$

On voit donc qu'il y a une masse égale à

$$\left(1 - \sum_1^\infty s_k\right) : a_1,$$

concentrée à l'origine; on a donc nécessairement

$$\left(1 - \sum_1^\infty s_k\right) : a_1 = 1 : \sum_1^\infty a_{2k-1}.$$

Cette masse sera nulle ou positive selon que la série

$$\sum_1^\infty a_{2k-1}$$

est divergente ou convergente. Il est à remarquer que ce second cas est en effet possible; il exige seulement que les a_{2k} croissent rapidement afin que

la série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

puisse être convergente.

Ensuite il y a les masses $\frac{s_k}{a_1}$ concentrées aux points r_k, qui pour $k = \infty$ se rapprochent indéfiniment de l'origine, la série

$$\sum_1^\infty r_k$$

étant convergente. On voit donc que la fonction

$$F(z) = \lim \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$$

a une infinité de pôles dans le voisinage de $z = 0$, et ce point $z = 0$ peut être un pôle ou non selon les cas.

70. L'une des premières fractions continues que l'on ait considérée en Analyse fournit un exemple du cas que nous venons d'étudier. C'est la fraction continue de Lambert

$$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{z^2}{5 + \cfrac{z^2}{7 + \dots}}}},$$

$$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \sum_1^\infty \frac{8z}{4z^2 + (2k-1)^2\pi^2}.$$

Pour la ramener à notre type, nous écrirons

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{z}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{z}}}}{e^{\frac{1}{\sqrt{z}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{z}}}} = \sum_1^\infty \frac{s_k}{z + r_k} = \cfrac{z}{z + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5z + \cfrac{1}{7 + \dots}}}},$$

$$r_k = 4 : (2k-1)^2\pi^2,$$

$$s_k = 8 : (2k-1)^2\pi^2.$$

On a ici

$$a_k = 2k - 1,$$

et la série $\sum_1^\infty \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ est bien convergente; en même temps la série

$$\sum_1^\infty a_{2k-1}$$

est divergente, il n'y a point de masse concentrée à l'origine. Ensuite on a

$$u(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(e^{\sqrt{t}} - e^{-\sqrt{t}}),$$

$$v(t) = \frac{1}{2}\ (e^{\sqrt{t}} + e^{-\sqrt{t}}).$$

Des formules que nous donnerons plus loin (n° 76) permettent de réduire en fraction continue

$$\frac{\mu}{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}\,\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{z}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{z}}}}{e^{\frac{1}{\sqrt{z}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{z}}}},$$

μ étant une constante positive. On aurait ainsi un exemple du cas où l'origine est un pôle; il s'y trouve concentrée la masse μ.

71. Nous allons revenir maintenant au cas où la série

$$\sum_1^\infty a_k$$

est *convergente*, pour faire une étude plus complète du problème des moments qui est indéterminé.

Soit t un paramètre positif; je considère la fraction continue

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \ddots + \cfrac{1}{a_{2n+1} z + \cfrac{1}{t}}}}}$$

qui est évidemment égale à

$$\frac{P_{2n}(z)+tP_{2n+1}(z)}{Q_{2n}(z)+tQ_{2n+1}(z)}.$$

En développant suivant les puissances descendantes de z, on a évidemment

$$\frac{c_0}{z}-\frac{c_1}{z^2}+\ldots+\frac{c_{2n}}{z^{2n+1}}-\frac{\varepsilon}{z^{2n+2}}+\ldots,$$

ε étant le premier coefficient qui dépend de t. Posons

$$\mathcal{X}_n(z)=Q_{2n}(z)+tQ_{2n+1}(z)=[a_1 z, a_2, \ldots a_{2n+1} z, t],$$

les racines de

$$\mathcal{X}_n(z)=0$$

seront réelles, inégales et négatives; en effet, $\mathcal{X}_n(z)$ est simplement ce que devient $Q_{2n+2}(z)$ pour $a_{2n+2}=t$. Comparons maintenant les racines de

$$\mathcal{X}_n(z)=0 \quad \text{à celles de} \quad \mathcal{X}_{n+1}(z)=0.$$

On a

$$\mathcal{X}_{n+1}(z)=[a_1 z, a_2, \ldots, a_{2n+1} z, a_{2n+2}, a_{2n+3} z, t].$$

Or, il est facile de voir que si l'on pose

$$a_{2n+2}=0, \qquad a_{2n+3}=0,$$

le second membre se réduit à $\mathcal{X}_n(z)$. Les racines de

$$\mathcal{X}_{n+1}(z)=0$$

sont au nombre de $n+2$; si maintenant on fait décroître a_{2n+2}, a_{2n+3} de leurs valeurs actuelles jusqu'à zéro, ces racines ne peuvent que *décroître*, d'après la proposition du n° 6. Une de ces racines deviendra $-\infty$, les autres vont coïncider avec les racines de

$$\mathcal{X}_n(z)=0.$$

Ce résultat peut s'exprimer ainsi : si l'on range par ordre de grandeur croissante les racines positives de

$$\mathcal{X}_n(-z)=0, \qquad x_1<x_2<x_3, \ldots <x_{n+1},$$

une racine de rang déterminé x_k *décroît* lorsqu'on change n en $n+1$.

Pour $n = \infty$ on a

$$\lim \mathfrak{X}_n(z) = q(z) + t q_1(z),$$

x_k tend vers une limite finie ξ_k et

$$q(z) + t q_1(z) = \left(1 + \frac{z}{\xi_1}\right)\left(1 + \frac{z}{\xi_2}\right)\left(1 + \frac{z}{\xi_3}\right)\cdots.$$

En effet, on peut répéter tous les raisonnements des nos 19 et 21. Il est clair que les ξ_k vont en croissant, mais peut-il arriver que $\xi_k = \xi_{k+1}$? Le raisonnement du no 20 ne peut pas s'appliquer ici; mais on peut procéder ainsi. Si l'on avait $\xi_k = \xi_{k+1}$, on aurait, pour une même valeur finie et réelle de z,

$$q(z) + t q_1(z) = 0,$$
$$q'(z) + t q'_1(z) = 0,$$

donc

$$q(z) q'_1(z) - q_1(z) q'(z) = 0.$$

L'expression

$$Q_{2n}(z) Q'_{2n+1}(z) - Q_{2n+1}(z) Q'_{2n}(z)$$

devrait donc s'annuler pour $n = \infty$, ce qui est manifestement impossible puisqu'elle est égale à

$$\sum_0^n a_{2k+1} Q_{2k}^2(z).$$

La transformation que nous venons d'indiquer résulte de l'identité bien connue

$$\frac{Q_{2n}(u) Q_{2n+1}(z) - Q_{2n}(z) Q_{2n+1}(u)}{z - u} = \sum_0^n a_{2k+1} Q_{2k}(z) Q_{2k}(u).$$

On a donc bien $\xi_k < \xi_{k+1}$.

Les nombres ξ_k sont des fonctions *décroissantes* du paramètre t; en effet ξ_k est la limite de x_k qui, elle, est une fonction décroissante de t. Nous avons

$$q(z) = \left(1 + \frac{z}{\lambda_1}\right)\left(1 + \frac{z}{\lambda_2}\right)\left(1 + \frac{z}{\lambda_3}\right)\cdots,$$

$$q_1(z) = c z \left(1 + \frac{z}{\theta_1}\right)\left(1 + \frac{z}{\theta_2}\right)\left(1 + \frac{z}{\theta_3}\right)\cdots,$$

où

$$c = \sum_{1}^{\infty} a_{2k-1}.$$

Pour $t = 0$, ξ_k devient égal à λ_k et l'on a ainsi

$$\xi_k \leqq \lambda_k.$$

Pour $t = \infty$, on doit évidemment avoir

$$\lim t\xi_1 = \frac{1}{c}, \qquad \xi_{k+1} = \theta_k,$$

donc

$$\xi_k \geqq \theta_{k-1},$$

et θ_k est compris entre λ_k et λ_{k+1}.

En définitive, si l'on considère les quantités croissantes

$$0, \lambda_1, \theta_1, \lambda_2, \theta_2, \lambda_3, \theta_3, \ldots,$$

on voit que les ξ_k sont compris dans les intervalles

(P) $$(0, \lambda_1), (\theta_1, \lambda_2), (\theta_2, \lambda_3), \ldots;$$

on n'en trouve aucun dans les intervalles

(Q) $$(\lambda_1, \theta_1), (\lambda_2, \theta_2), (\lambda_3, \theta_3), \ldots.$$

On trouvera facilement

$$\frac{p(z) + tp_1(z)}{q(z) + tq_1(z)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\eta_k}{z + \xi_k},$$

et la distribution des masses

$$(\eta_k, \xi_k), \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

est encore une solution du problème des moments, dépendante cette fois du paramètre t.

72. La considération de la fraction continue

$$\frac{P_{2n-1}(z)+tzP_{2n}(z)}{Q_{2n-1}(z)+tzQ_{2n}(z)}=\cfrac{1}{a_1z+\cfrac{1}{a_2+\ldots+\cfrac{1}{a_{2n}+\cfrac{1}{tz}}}}$$

conduit à des résultats analogues, que nous nous contenterons d'énoncer

$$q_1(z)+tzq(z)=[c+t]z\left(1+\frac{z}{\xi'_1}\right)\left(1+\frac{z}{\xi'_2}\right)\left(1+\frac{z}{\xi'_3}\right)\cdots,$$

$$\frac{p_1(z)+tzp(z)}{q_1(z)+tzq(z)}=\frac{\eta'_0}{z}+\sum_1^\infty\frac{\eta'_k}{z+\xi'_k}.$$

On a ici $\xi'_0=0$ et

$$\lambda_k\leqq\xi'_k<\theta_k.$$

Les ξ'_k sont encore des fonctions décroissantes de t; pour $t=0$, $\xi'_k=\theta_k$; pour $t=\infty$, $\xi'_k=\lambda_k$, les η'_k sont positifs, $\eta'_0=1:c+t$ s'annule pour $t=\infty$. La distribution des masses

$$(\eta'_k,\xi'_k): \qquad (k=0,1,2,3,\ldots)$$

donne encore une solution du problème des moments; cette fois-ci, les ξ sont dans les intervalles

$$(\lambda_1,\theta_1),(\lambda_2,\theta_2),(\lambda_3,\theta_3).$$

On voit donc que le problème des moments *a toujours une solution dans laquelle il y a une concentration de masse finie en un point donné arbitrairement*. En effet, les résultats précédents font connaître toujours *une* solution tant que le point donné n'est pas à l'origine. Dans ce dernier cas, nous avons une infinité de solutions par les systèmes

$$(\nu_k,\theta_k) \qquad \text{et} \qquad (\eta'_k,\xi'_k);$$

le premier système donne la masse maxima qui peut être concentrée à l'origine

$$\nu_0=\frac{1}{c}>\eta'_0=\frac{1}{c+t}.$$

73. Nous allons montrer maintenant qu'un système tel que

$$(\eta_k,\xi_k)$$

est celui où la masse η_k concentrée au point ξ_k est un maximum. De même dans le système (η'_k, ξ'_k), la masse η'_k concentrée au point ξ'_k est un maximum pour $k = 1, 2, 3, \ldots$. Nous venons de remarquer que cela n'est plus vrai pour $k = 0$, le système (ν_k, θ_k) donnant alors la concentration maxima à l'origine.

Soit a un nombre positif quelconque; pour chercher une limite supérieure de la masse qui peut être concentrée dans ce point dans une solution quelconque du problème des moments, je vais considérer les intégrales

$$\int_0^\infty [1 + X_1(u-a) + X_2(u-a)^2 + \ldots + X_n(u-a)^n]^2 \, d\psi(u),$$

$$\int_0^\infty [1 + X_1(u-a) + X_2(u-a)^2 + \ldots + X_n(u-a)^n]^2 \frac{u}{a} \, d\psi(u).$$

Ces intégrales ne changent point de valeur si l'on remplace la fonction $\psi(u)$, qui caractérise une distribution de masse qui satisfait au problème des moments, par une autre fonction de même nature. On peut donc supposer que la fonction $\psi(u)$ caractérise la distribution qui, au point a, admet la plus grande concentration de masse possible. D'autre part, ces intégrales ont pour $u = a$ un élément égal à cette masse concentrée au point a. Les intégrales sont donc des *limites supérieures* du maximum cherché. Pour avoir les limites les plus proches possibles, nous allons calculer le minimum de ces intégrales considérées comme des fonctions de X_1, X_2, ..., X_n, et ensuite nous poserons $n = \infty$.

Posons, dans le cas de la première intégrale,

$$\mathfrak{L} = 1 + X_1(u-a) + \ldots + X_n(u-a)^n;$$

les conditions du minimum sont

$$\int_0^\infty \mathfrak{L}(u-a)^k \, d\psi(u) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ou

$$\int_0^\infty \mathfrak{L}(u-a)u^k \, d\psi(u) = 0 \quad [(k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

On en conclut facilement

$$(u-a)\mathfrak{L} = \alpha Q_{2n+1}(-u) + \beta Q_{2n}(-u),$$

et, pour déterminer les constantes α et β,

$$0 = \alpha Q_{2n+1}(-a) + \beta Q_{2n}(-a),$$
$$-1 = \alpha Q'_{2n+1}(-a) + \beta Q'_{2n}(-a).$$

Soit, pour abréger,

$$\Delta = Q_{2n}(-a)\,Q'_{2n+1}(-a) - Q_{2n+1}(-a)\,Q'_{2n}(-a);$$

on aura

$$\mathfrak{L} = \frac{Q_{2n}(-u)\,Q_{2n+1}(-a) - Q_{2n+1}(-u)\,Q_{2n}(-a)}{(u-a)\,\Delta}$$

ou

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\Delta}\sum_{0}^{n} a_{2k+1}\,Q_{2k}(-u)\,Q_{2k}(-a).$$

La valeur du minimum est

$$\int_0^\infty \mathfrak{L}^2\,d\psi(u) = \int_0^\infty \mathfrak{L}\,d\psi(u) = \frac{1}{\Delta}\sum_{0}^{n} a_{2k+1}\,Q_{2k}(-a)\int_0^\infty Q_{2k}(-u)\,d\psi(u);$$

dans le second membre tous les termes s'annulent, excepté celui qui répond à $k=0$; le minimum se trouve ainsi égal à

$$\frac{1}{\Delta}a_1\int_0^\infty d\psi(u) = \frac{1}{\Delta},$$

et, puisque $\mathfrak{L} = 1$ pour $u = a$,

$$\Delta = \sum_{0}^{n} a_{2k+1}\,Q_{2k}^2(-a).$$

En faisant croître n indéfiniment, on obtient donc, comme une limite supérieure de la masse pouvant être concentrée au point a, l'expression

$$1 : [q(-a)\,q'_1(-a) - q_1(-a)\,q'(-a)].$$

Soit Δ_1 ce que devient Δ lorsqu'on remplace c_k par c_{k+1}; le minimum de la seconde intégrale sera

$$\frac{1}{a\Delta_1}.$$

Or, par ce changement de c_k en c_{k+1},

$$a_{2k+1} \quad \text{devient} \quad (a_1+a_2+\ldots+a_{2k+1})^2 a_{2k+2},$$
$$Q_{2k}(z) \quad \text{devient} \quad \frac{Q_{2k+1}(z)}{(a_1+a_3+\ldots+a_{2k+1})^2},$$

comme on le verra plus loin n° 77.

On a donc

$$\Delta_1 = \sum_0^n a_{2k+2}\left[\frac{Q_{2k+1}(-a)}{a}\right]^2,$$

et l'on voit facilement que

$$a\Delta_1 = \Delta + \frac{1}{a} Q_{2n+1}(-a)\, Q_{2n+2}(-a).$$

En faisant croître n indéfiniment, on en déduit cette limite supérieure de la masse pouvant être concentrée au point a

$$1 : \left[q(-a)q'_1(-a) - q_1(-a)q'(-a) + \frac{1}{a}q(-a)q_1(-a)\right].$$

Or, lorsque a est dans l'un des intervalles

$$(0, \lambda_1), \quad (\theta_1, \lambda_2), \quad (\theta_2, \lambda_3), \quad \ldots,$$

le produit $q(-a)q_1(-a)$ est négatif; on adoptera donc comme limite supérieure

$$1 : [q(-a)q'_1(-a) - q_1(-a)q'(-a)];$$

mais, si a est dans l'un des intervalles

$$(\lambda_1, \theta_1), \quad (\lambda_2, \theta_2), \quad (\lambda_3, \theta_3), \quad \ldots,$$

$q(-a)q_1(-a)$ est positif; la limite supérieure la moins élevée sera

$$1 : \left[q(-a)q'_1(-a) - q_1(-a)q'(-a) + \frac{1}{a}q(-a)q_1(-a)\right].$$

74. Il est très facile maintenant de voir que les systèmes

$$(\eta_k, \xi_k) \quad \text{et} \quad (\eta'_k, \xi'_k)$$

sont ceux qui possèdent les concentrations maxima aux points ξ_k, ξ'_k. En

effet, si a est dans des intervalles

$$(0, \lambda_1), \quad (\theta_1, \lambda_2), \quad (\theta_2, \lambda_3), \quad \ldots,$$

on aura $a = \xi_k$ pour une valeur convenable de t. Cette valeur de t se déterminera par la condition

$$q(-a) + tq_1(-a) = 0;$$

elle est positive. La valeur correspondante de η_k est

$$\frac{p(-a) + tp_1(-a)}{q'(-a) + tq'_1(-a)},$$

et un calcul facile montre que cette valeur est précisément égale à

$$1 : [q(-a)q'_1(-a) - q_1(-a)q'(-a)],$$

qui est la limite supérieure obtenue plus haut. Si, en second lieu, a est dans un des intervalles

$$(\lambda_1, \theta_1), \quad (\lambda_2, \theta_2), \quad (\lambda_3, \theta_3), \quad \ldots,$$

on aura $a = \xi'_k$, en déterminant t par la condition

$$q_1(-a) - atq(-a) = 0,$$

et la valeur correspondante de η'_k est

$$\frac{p_1(-a) - atp(-a)}{q'_1(-a) - atq'(-a) + tq(-a)},$$

ce qui est égal à la limite supérieure

$$1 : \left[q(-a)q'_1(-a)q_1(-a)q'(-a) + \frac{1}{a}q(-a)q_1(-a)\right].$$

75. Considérons une distribution dans laquelle la masse μ concentrée au point a est maxima. Supprimons cette masse μ; je dis que le nouveau système qui reste après cette suppression est un système *déterminé*. En effet, s'il était *indéterminé*, on pourrait toujours trouver un système équivalent ayant en a une concentration de masse finie. En rétablissant μ, on aurait donc en a une concentration de masse supérieure à μ, ce qui est impossible. On voit aussi qu'il n'y a pas deux distributions différentes qui donnent le maximum de masse dans un point donné.

Nous avons vu que le système

$$(\nu_k, \theta_k),$$

correspondant à la limite $\frac{p_1(z)}{q_1(z)}$, est celui où la masse ν_0 concentrée à l'origine est maxima. On peut caractériser d'une façon analogue la distribution

$$(\mu_k, \lambda_k)$$

correspondant à la limite $\frac{p(z)}{q(z)}$, en disant que c'est la distribution pour laquelle l'intervalle $(0, \lambda_1)$, qui ne contient point de masse, est le plus grand possible. On peut dire aussi que c'est la distribution pour laquelle le moment d'ordre -1

$$\sum_1^\infty \frac{\mu_k}{\lambda_k}$$

est minimum. Cela se déduit aisément de certaines formules que nous donnerons plus loin (n°s 77, 78). Si l'on a plusieurs solutions du problème des moments, on peut en déduire une nouvelle en multipliant ces solutions par des facteurs positifs dont la somme est 1, et en les superposant ensuite. En partant des solutions

$$(\eta_k, \xi_k), \quad (\eta'_k, \xi'_k)$$

qui dépendent du paramètre t, on pourra obtenir ainsi des solutions dans lesquelles la masse est répandue d'une manière *continue* sur l'axe. Nous croyons inutile d'écrire les formules explicites qui renferment évidemment des intégrales.

CHAPITRE X.

SUR QUELQUES TRANSFORMATIONS DE LA FRACTION CONTINUE.

76. Supposons qu'à une distribution de masse donnant les moments

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_k, \quad \ldots$$

on ajoute une masse μ concentrée à l'origine. Il est clair que c_0 se changera en $c_0 + \mu$; les autres moments ne changent pas. Pour voir ce que devient la fraction continue après cette modification, il suffit de se reporter aux formules des n°s 11 et 12. On voit alors que le déterminant A_n devient $A_n + \mu C_{n-1}$, les déterminants B_n, C_n ne changent pas. Il s'ensuit que

$$a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}$$

deviendra

$$\frac{(A_n + \mu C_{n-1})^2}{B_n B_{n-1}} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}} \left(1 + \mu \frac{C_{n-1}}{A_n}\right)^2;$$

or

$$\frac{C_{n-1}}{A_n} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1};$$

donc a_{2n} se changera en

$$[1 + \mu (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1})]^2 a_{2n} = a'_{2n}.$$

Ensuite, on voit par un calcul analogue que a_{2n+1} devient

$$a_{2n+1} : [1 + \mu (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1})] \times [1 + \mu (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1})] = a'_{2n+1}.$$

Ces relations, on peut les écrire aussi

$$\frac{1}{a'_1 + a'_3 + \ldots + a'_{2k+1}} = \mu + \frac{1}{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1}},$$

$$(a'_1 + a'_3 + \ldots + a'_{2k-1})^2 a'_{2k} = (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1})^2 a_{2k}.$$

Sous cette forme, elles sont presque évidentes, puisque

$$(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1})^2 a_{2k} = \frac{C_{k-1}^2}{B_k B_{k-1}}.$$

Si le problème des moments est indéterminé dans le cas des données

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \ldots,$$

il sera évidemment aussi indéterminé dans le cas des moments

$$c_0 + \mu, \quad c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \ldots.$$

Mais, si l'on est d'abord dans le cas déterminé, pourra-t-il arriver qu'on soit dans le cas indéterminé après avoir ajouté la masse μ à l'origine? Nous avons déjà annoncé (n° 65) que cela ne peut arriver que dans un cas exceptionnel.

En effet, on suppose la série

$$\sum_1^\infty a_k$$

divergente et les séries

$$\sum_1^\infty a'_{2k-1}, \quad \sum_1^\infty a'_{2k}$$

convergentes l'une et l'autre. La première série est toujours convergente mais, pour que

$$\sum_1^\infty a'_{2n}$$

soit convergente, il faut et il suffit que

$$\sum_1^\infty (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1})^2 a_{2k}$$

soit convergente. Il s'ensuit que la série

$$\sum_1^\infty a_{2k}$$

est convergente aussi; donc

$$\sum_1^\infty a_{2k-1}$$

sera divergente, tandis que

$$\sum_1^\infty (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1}) a_{2k}$$

sera convergente évidemment. On est donc dans le cas par
au n° 66, et la solution du problème des moments est don
tème

$$(\gamma_k, \alpha_k)$$

Mais, en ajoutant la masse μ à l'origine, on obtient un
miné. Mais je dis que la solution formée par les masses
solution qui donne la plus grande concentration à l'ori
séquent, du type

$$(\nu_k, \vartheta_k)$$

En effet, il y aurait autrement une solution avec
rigine, et, en ôtant la masse μ, on aurait un systèm
(γ_k, α_k), mais qui ne serait pas identique avec ce s
est impossible.

77. Supposons maintenant que l'on rempla
lution (m_i, x_i) du problème des moments
demment la solution $(m_i x_i, x_i)$ pour le cas
Ainsi, si l'on est d'abord dans le cas indét
ce cas indéterminé. Mais nous avons aus
est d'abord dans le cas *déterminé*, il po
tionnel, que le second problème soit in

C'est ce qu'on déduira sans diffic
donner.

Il est clair que, par le changement
viendra C_n.

Donc, si a_k se change en a'_n, on a

$$a'_{2n} \quad \frac{B_n^2}{C_n C_{n-1}} \qquad a_{2n+1} : (a_1$$

$$a'_{2n+1} \quad \frac{C_{n-1}^2}{B_n B_{n-1}} \qquad a_{2n} a_1 \quad a$$

Ensuite, on voit facilement q

Voici maintenant les form
duisant la série

$$n$$

en fraction continue

$$\cfrac{1}{a'_1 z + \cfrac{1}{a'_2 + \cfrac{1}{a'_3 z + \ldots}}},$$

on aura

$$a'_1 = \frac{1}{m},$$

$$a'_{2n+1} = a_{2n} : (m - a_2 - a_4 - \ldots - a_{2n-2})(m - a_2 - a_4 - \ldots - a_{2n}),$$

$$a'_{2n} = a_{2n-1}(m - a_2 - a_4 - \ldots - a_{2n-2})^2.$$

78. En dernier lieu étudions l'effet d'une *translation* sur un système de masses. Cela revient à développer, suivant les puissances descendantes de z, l'expression

$$\frac{c_0}{z+\lambda} - \frac{c_1}{(z+\lambda)^2} + \frac{c_2}{(z+\lambda)^3} - \ldots.$$

En supposant qu'on obtienne

$$\frac{c'_0}{z} - \frac{c'_1}{z^2} + \frac{c'_2}{z^3} - \ldots,$$

on aura

$$c'_k = c_k + \frac{k}{1}\lambda c_{k-1} - \frac{k(k-1)}{1.2}\lambda^2 c_{k-2} + \ldots + \lambda^k c_0.$$

Un calcul facile montre qu'en remplaçant c_k par c'_k le déterminant A_n ne change point, le déterminant B_n devient $B_n Q_{2n}(\lambda)$, d'où l'on déduit

$$a'_{2n-1} = a_{2n-1} Q^2_{2n}(\lambda),$$

$$a'_{2n} = a_{2n} : Q_{2n-2}(\lambda) Q_{2n}(\lambda).$$

Si $\lambda > 0$, un système indéterminé restera toujours indéterminé, mais un système déterminé peut se changer en système indéterminé dans un cas singulier, comme cela a été déjà énoncé au n° 65.

CHAPITRE XI.

EXEMPLES PARTICULIERS.

79. Je vais donner maintenant quelques exemples : dans tous les cas la fraction continue sera *convergente*.

Pour abréger, je supprime toujours les artifices qu'il faut employer pour obtenir la transformation de l'intégrale définie en fraction continue.

Soit λ un paramètre positif, je considère d'abord la fraction continue

$$F(z, \lambda) = \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\lambda}{z + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2\lambda}{z + \cfrac{3}{1 + \cfrac{3\lambda}{z + \dots}}}}}}}$$

On a ici

$$a_{2k+1} = \frac{1}{\lambda^k}, \qquad a_{2k} = \frac{\lambda^{k-1}}{k},$$

l'une des deux séries

$$\sum_0^\infty a_{2k+1}, \quad \sum_1^\infty a_{2k}$$

sera donc toujours divergente, et pour $\lambda = 1$ elles le sont toutes les deux; la fraction continue est toujours convergente. Mais il y a lieu de distinguer les cas $\lambda < 1$, $\lambda > 1$. Lorsque $\lambda < 1$, on a

$$F(z, \lambda) = \sum_1^\infty \frac{(1-\lambda)\lambda^{n-1}}{z + n(1-\lambda)}.$$

L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}$$

se réduit ainsi à une série; il y a sur l'axe une infinité de points matériels

$$[(1-\lambda)\lambda^{n-1}, n(1-\lambda)].$$

Pour $\lambda > 1$, on a

$$F(z, \lambda) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda - 1}{\lambda^n[z + (n-1)(\lambda - 1)]}.$$

L'intégrale définie se décompose encore en série; la distribution de masse est

$$\left[\frac{\lambda - 1}{\lambda^n}, (n-1)(\lambda - 1)\right].$$

On voit que, lorsque λ diffère infiniment peu de l'unité, les masses sont infiniment petites et infiniment rapprochées. Pour $\lambda = 1$, on a une distribution *continue* de masse, car on retrouve alors la fraction continue de Laguerre

$$F(z, 1) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}\, du}{z + u}.$$

La distribution de masse doit être regardée comme variant d'une façon continue avec λ.

On a encore cette expression analytique

$$F(z, \lambda) = \int_0^{\infty} \frac{(1 - \lambda)\, e^{-zu}}{e^{(1-\lambda)u} - \lambda}\, du,$$

d'où l'on déduit en effet, lorsque $\lambda < 1$,

$$F(z, \lambda) = \int_0^{\infty} (1 - \lambda)\, e^{-zu} \sum_{1}^{\infty} e^{-n(1-\lambda)u} \lambda^{n-1}\, du = \sum_{1}^{\infty} \frac{(1 - \lambda)\lambda^{n-1}}{z + n(1 - \lambda)},$$

et, lorsque $\lambda > 1$,

$$F(z, \lambda) = \int_0^{\infty} (\lambda - 1)\, e^{-zu} \sum_{1}^{\infty} \lambda^{-n} e^{-(n-1)(\lambda-1)u}\, du = \sum_{1}^{\infty} \frac{(\lambda - 1)\lambda^{-n}}{z + (n-1)(\lambda - 1)}.$$

80. On peut rattacher à l'exemple précédent la réduction en fraction continue de la série

$$\varphi(w, \mu) = 1 + \frac{w}{1 + \mu} + \frac{w^2}{1 + 2\mu} + \frac{w^3}{1 + 3\mu} + \ldots$$

considérée par M. Poincaré (*Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. II, p. 3).

Si, dans le cas $\lambda < 1$, on pose

$$w = \lambda, \qquad \mu = \frac{1-\lambda}{z},$$

il vient

$$\varphi(w, \mu) = 1 + \frac{w}{\mu} F(z, \lambda).$$

Dans le cas $\lambda > 1$, on posera

$$w = 1 : \lambda, \qquad \mu = \frac{\lambda - 1}{z} \qquad \text{et} \qquad \varphi(w, \mu) = \frac{1}{w\mu} F(z, \lambda).$$

On obtient ainsi les fractions continues

$$\varphi(w, \mu) = 1 + \cfrac{w}{1 - w + \cfrac{\mu}{1 + \cfrac{w\mu}{1 - w + \cfrac{2\mu}{1 + \cfrac{2w\mu}{1 - w + \cfrac{3\mu}{1 + \dots}}}}}},$$

$$\varphi(w, \mu) = \cfrac{1}{1 - w + \cfrac{w\mu}{1 + \cfrac{\mu}{1 - w + \cfrac{2w\mu}{1 + \cfrac{2\mu}{1 - w + \cfrac{3w\mu}{1 + \dots}}}}}}.$$

En supposant $0 < w < 1$, elles sont convergentes pour toute valeur réelle ou imaginaire de μ, à l'exception des valeurs $\mu = -\frac{1}{n}$; on s'assure facilement qu'il y a encore convergence pour toute autre valeur négative de μ.

81. On peut généraliser l'exemple précédent en introduisant deux nouveaux paramètres. Ainsi soit

$$F(z, \lambda, a, b) = \int_0^\infty \left(\frac{1-\lambda}{e^{u(1-\lambda)} - \lambda^b} \right)^a e^{-zu}\, du,$$

on aura

$$F(z, 1, a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-zu}}{(u+b)^a}\, du = \frac{1}{\Gamma(a)} \int^\infty \frac{u^{a-1} e^{-bu}}{z+u}\, du;$$

pour $\lambda < 1$,

$$F(z, \lambda, a, b) = \sum_0^\infty \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2.3\ldots n} \frac{(1-\lambda)^a \lambda^{bn}}{z+(n+a)(1-\lambda)};$$

pour $\lambda > 1$,

$$F(z, \lambda, a, b) = \sum_0^\infty \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2.3\ldots n} \frac{(\lambda-1)^a \lambda^{-b(n+a)}}{z+n(\lambda-1)},$$

tandis que la fraction continue est

$$\cfrac{m^a}{z+\cfrac{am}{1+\cfrac{m\lambda^b}{z+\cfrac{(a+1)m}{1+\cfrac{2m\lambda^b}{z+\cfrac{(a+2)m}{1+\cfrac{3m\lambda^b}{z+\ldots}}}}}}},$$

où l'on a posé

$$m = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^b}.$$

82. Je vais étudier maintenant, au point de vue de leur convergence, les fractions continues qu'on obtient pour les intégrales

$$F_1(z, k) = \int_0^\infty \operatorname{cn}(u, k) e^{-zu}\, du,$$

$$F_2(z, k) = \int_0^\infty \operatorname{dn}(u, k) e^{-zu}\, du,$$

$$F_3(z, k) = \int_0^\infty \operatorname{sn}(u, k) e^{-zu}\, du,$$

$$F_4(z, k) = z\int_0^\infty \operatorname{sn}^2(u, k) e^{-zu}\, du.$$

En substituant pour les fonctions elliptiques leurs développements suivant les puissances de u, on obtient les développements suivant les puissances descendantes de z. Ces développements sont de la forme

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^3} + \frac{c_2}{z^5} - \frac{c_3}{z^7} + \ldots$$

dans le cas de $F_1(z, k)$ et $F_2(z, k)$: de la forme

$$\frac{c_0}{z^2} - \frac{c_1}{z^4} - \frac{c_2}{z^6} - \frac{c_3}{z^8} - \ldots$$

dans le cas de $F_3(z, k)$ et $F_4(z, k)$. Dans tous les cas les coefficients c_n sont des polynomes en k à coefficients positifs.

Voici maintenant les fractions continues qui sont de la forme

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 z - \cfrac{1}{a_3 z + \ldots}}}$$

ou de la forme

$$\cfrac{1}{a_1 z^2 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z^2 + \ldots}}},$$

selon les deux formes du développement suivant les puissances descendantes de z. Dans le cas du second développement les valeurs des a_n sont très compliquées; mais, en se bornant à considérer les réduites d'ordre pair [*voir* la forme (I^d) de l'Introduction], on a une fraction continue de la forme

$$\cfrac{\lambda_0}{z^2 + \alpha_1 - \cfrac{\lambda_1}{z^2 + \alpha_2 - \cfrac{\lambda_2}{z_2 + \alpha_3 - \ldots}}}$$

avec des valeurs simples des λ_n, α_n.

Dans le cas de $F_1(z, k)$, on a

$$b_0 = 1, \qquad b_{2n-1} = (2n-1)^2, \qquad b_{2n} = (2nk)^2,$$

d'où

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1,$$

$$a_{2n+1} = \left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\right]^2 \frac{1}{k^{2n}},$$

$$a_{2n} \;= \left[\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 k^{2n-2}.$$

Dans le cas de $F_2(z, k)$, on a

$$b_0 = 1, \qquad b_{2n-1} = (2n-1)^2 k^2, \qquad b_{2n} = (2n)^2,$$

d'où

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{k^2},$$

$$a_{2n+1} = \left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\right]^2 k^{2n},$$

$$a_{2n} = \left[\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{k^{2n}}.$$

Dans le cas de $F_3(z, k)$, on a

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_n = (2n-1)(2n)^2(2n+1)k^2, \qquad \alpha_n = (2n-1)^2(1+k^2).$$

Dans le cas de $F_4(z, k)$, on a

$$\lambda_0 = 2, \qquad \lambda_n = 2n(2n+1)^2(2n+2)k^2, \qquad \alpha_n = (2n)^2(1+k^2).$$

La démonstration de ces formules, au point de vue purement formel, se trouve dans un Mémoire que j'ai publié dans le tome III de ces *Annales*. J'ai ajouté ici seulement la réduction en fraction continue de $F_4(z, k)$.

83. Les fractions continues pour $F_1(z, k)$, $F_2(z, k)$ sont *convergentes* pour toute valeur positive de k^2. Dès lors elles doivent se mettre sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{z\,d\Phi(u)}{z^2+u};$$

mais nous allons voir que cette intégrale définie se réduit encore à une série. Substituons en effet, aux fonctions elliptiques, leurs développements en séries périodiques, on trouve sans peine

$$F_1(z, k) = \frac{2\pi}{k\mathrm{K}} \sum_0^\infty \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} \frac{z}{z^2 + \left[\frac{(2n+1)\pi}{2\mathrm{K}}\right]^2},$$

$$F_2(z, k) = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \left[\frac{1}{z} + \sum_1^\infty \frac{4q^n}{1+q^{2n}} \frac{z}{z^2 + \left(\frac{n\pi}{\mathrm{K}}\right)^2}\right],$$

$$F_3(z, k) = \frac{\pi^2}{k\mathrm{K}^2} \sum_0^\infty \frac{(2n+1)q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \frac{1}{z^2 + \left[\frac{(2n+1)\pi}{2\mathrm{K}}\right]^2},$$

$$F_4(z, k) = \frac{2\pi^4}{k^2\mathrm{K}^4} \sum^\infty \frac{n^3 q^n}{1-q^{2n}} \frac{1}{z^2 + \left(\frac{n\pi}{\mathrm{K}}\right)^2}.$$

On reconnaît ainsi que les fractions continues pour $F_3(z, k)$ et $F_4(z, k)$ sont aussi du type que nous avons étudié. C'est ce que nous avons déjà vérifié d'une autre façon dans l'Introduction pour $F_3(z, k)$.

Mais les réduites des fractions continues pour $F_3(z, k)$, $F_4(z, k)$ tendent-elles vers les expressions de ces fonctions que nous venons de donner? Pour répondre affirmativement, il faudrait savoir qu'on est dans le cas déterminé du problème des moments.

84. Supposons $k < 1$, $q < 1$, l'expression de $F_4(z, k)$ montre qu'en posant

$$m_n = \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}}, \qquad x_n = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2K}\right]^2,$$

le système des masses

$$(m_n, x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

est un système déterminé. Ensuite le système

$$(m_n x_n, x_n)$$

sera aussi déterminé; car, pour qu'il en fût autrement, il faudrait que la série

$$\sum_1^\infty a'_{2n-1} = \sum_1^\infty a_{2n}(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1})^2$$

soit convergente (*voir* n° 77); or, on constate que la série

$$\sum_1^\infty a_{2n} a_{2n-1}^2$$

est déjà divergente.

On en conclut que, M étant une constante quelconque, le système des masses

$$m_n = \frac{(2n+1)^2 q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} M, \qquad x_n = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2K}\right]^2 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

est un système déterminé. Or, si l'on prend

$$M > \frac{1}{2n+1} \frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

on reconnaît immédiatement que le système

$$m_n = \frac{(2n+1)\,q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}, \qquad x_n = \left[\frac{(2n+1)\,\pi}{2\mathrm{K}}\right]^2$$

sera aussi *déterminé*. Cela prouve que la fraction continue pour $F_3(z, k)$ est bien dans le cas déterminé; la limite est bien égale à $F_3(z, k)$.

Considérons la fraction continue pour $F_2(z, k)$. La série

$$\sum_1^\infty a_{2n-1} = \sigma$$

est *convergente* (il y a une concentration de masse à l'origine). Si l'on remplace c_k par c_{k+1}, on aura (n° 77)

$$a'_{2n} > \frac{a_{2n+1}}{\sigma^2},$$

$$a'_{2n-1} > a_1^2\, a_{2n}.$$

En changeant de nouveau c_k en c_{k+1}, on aura

$$a''_{2n-1} = a'_{2n}\,(a'_1 + a'_3 + \ldots + a'_{2n-1})^2,$$

donc

$$a''_{2n-1} > a'_{2n}\, a'^2_{2n-1} > \frac{a_1^4}{\sigma^2}\, a_{2n+1}\, a_{2n}^2.$$

Or la série

$$\Sigma\, a_{2n+1}\, a_{2n}^2$$

est manifestement divergente; il en est de même de la série

$$\Sigma\, a''_{2n-1},$$

ce qui prouve que le système des masses

$$m_n = \frac{n^4 q^n}{1+q^{2n}}\,\mathrm{M}, \qquad x_n = \left(\frac{n\pi}{\mathrm{K}}\right)^2$$

est un système déterminé. En prenant

$$\mathrm{M} > \frac{1}{n}\,\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}},$$

on reconnaît que le système

$$m_n = \frac{n^3 q^n}{1-q^{2n}}, \qquad x_n = \left(\frac{n\pi}{\mathrm{K}}\right)^2$$

est également déterminé, c'est-à-dire la fraction continue pour $F_4(z, k)$ tend bien vers $F_4(z, k)$.

Nous avons supposé $k < 1$, mais on voit facilement que

$$F_1\left(z, \frac{1}{k}\right) = k\, F_2(kz, k),$$
$$F_2\left(z, \frac{1}{k}\right) = k\, F_1(kz, k),$$
$$F_3\left(z, \frac{1}{k}\right) = k^2 F_3(kz, k),$$
$$F_4\left(z, \frac{1}{k}\right) = k^2 F_4(kz, k),$$

ce qui montre que cette restriction est inutile.

85. Les distributions de masses correspondant aux fonctions $F(z, k)$ présentent toutes cette particularité que, lorsque k tend vers l'unité, les masses deviennent infiniment petites, mais aussi infiniment rapprochées.

Pour $k = 1$ on obtient, comme limite, une distribution continue de masse sur l'axe. C'est le même phénomène que nous avons rencontré déjà (n° 79).

Il ne semble pas sans intérêt d'obtenir directement la distribution correspondant à $k = 1$, comme limite de celle qui correspond à $k = 1 - \varepsilon$, ε étant infiniment petit. Faisons le calcul pour $F_1(z, k)$. Posons

$$\delta = \frac{\pi^2}{\log\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)},$$

δ sera infiniment petit, et l'on aura $q = e^{-\delta}$ avec une approximation suffisante. Ensuite

$$\frac{2\pi}{kK} = \frac{4\delta}{\pi},$$

et la masse $\Phi(u)$ comprise dans l'intervalle $(0, u)$ sera

$$\frac{4\delta}{\pi}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\delta}}{1 + e^{-\delta}} + \frac{e^{-\frac{3}{2}\delta}}{1 + e^{-3\delta}} + \ldots + \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}\delta}}{1 + e^{-(2n+1)\delta}}\right),$$

si l'on suppose que l'entier n est déterminé par la condition qu'on doit avoir sensiblement

$$u = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2K}\right]^2,$$

en sorte que

$$(2n+1)\delta = \pi\sqrt{u}.$$

A la limite, ε et δ tendant vers zéro, on aura

$$\Phi(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi\sqrt{u}} \frac{e^{-\frac{1}{2}v}}{1+e^{-v}}\,dv,$$

$$d\Phi(u) = \frac{du}{\sqrt{u}\left(e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{u}} + e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{u}}\right)},$$

$$F_1(z,1) = \int_0^\infty \frac{z\,d\Phi(u)}{z^2+u} = \int_0^\infty \frac{z\,du}{z^2+u^2}\left(\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\pi u} + e^{-\frac{1}{2}\pi u}}\right).$$

Remarquons que, dans le cas $k=1$, les fractions continues pour $F_3(z,k)$, $F_4(z,k)$, qui sont de la forme (I^d), se ramènent facilement à la forme (I^a) ou (I), et l'on reconnaît alors qu'elles sont encore convergentes dans ce cas.

86. Je vais donner maintenant la fraction continue dans quelques cas où les moments c_n s'expriment très simplement par les polynomes de Bernoulli, définis par la relation

$$\frac{e^{\lambda z}-1}{e^z-1} - \frac{1}{2} = \varphi_0(\lambda) + \varphi_1(\lambda)\,z + \varphi_2(\lambda)\frac{z^2}{1.2} + \varphi_3(\lambda)\frac{z^3}{1.2.3} + \ldots,$$

en sorte que $\varphi_0(\lambda) = \lambda - \frac{1}{2}$. On supposera dans ce qui suit $0 < \lambda < 1$.

Considérons d'abord la série

$$-\frac{\varphi_1(\lambda)}{z^2} - \frac{\varphi_3(\lambda)}{z^4} - \frac{\varphi_5(\lambda)}{z^6} - \frac{\varphi_7(\lambda)}{z^8} - \ldots,$$

elle donne la fraction continue

$$\cfrac{b_0}{z^2 + \cfrac{b_1}{1 + \cfrac{b_2}{z^2 + \ldots}}},$$

où

$$b_0 = \tfrac{1}{2}\lambda(1-\lambda),$$

$$b_{2n-1} = \frac{n(n-\lambda)(n-1+\lambda)}{2(2n-1)},$$

$$b_{2n} = \frac{n(n+\lambda)(n+1-\lambda)}{2(2n+1)},$$

La limite de la fraction continue s'exprime ainsi

$$4\sin(\lambda\pi)\int_0^\infty \frac{z\,du}{z^2+u^2}\left[\frac{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}{(e^{\pi u}+e^{-\pi u})^2-4\cos^2(\lambda\pi)}\right],$$

ou encore

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\lambda-\frac{1}{2})u}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}u}\,e^{-zu}\,du=\tfrac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{z+1+\lambda}{2}\right)+\psi\left(\frac{z+2-\lambda}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\psi\left(\frac{z+\lambda}{2}\right)-\psi\left(\frac{z+1-\lambda}{2}\right)\right].$$

Nous avons posé ici

$$\operatorname{ch}(u)=\cos(iu)=\frac{e^u+e^{-u}}{2}.$$

La série

$$\frac{\chi_1(\lambda)}{z^2}+\frac{\chi_3(\lambda)}{z^4}+\frac{\chi_5(\lambda)}{z^6}+\ldots$$

enfin donne la fraction continue

$$\cfrac{\lambda_0}{z^2+\alpha_1-\cfrac{\lambda_1}{z^2+\alpha_2-\cfrac{\lambda_2}{z^2+\alpha_3-\ldots}}},$$

où

$$\lambda_0=\lambda-\tfrac{1}{2},$$
$$\lambda_n=n^2\left(\frac{2n-1}{2}+\lambda\right)\left(\frac{2n+1}{2}-\lambda\right),$$
$$\alpha_n=\lambda-\lambda^2+\tfrac{1}{2}(2n-1)^2.$$

La limite de la fraction continue s'exprime par

$$-4\cos(\lambda\pi)\int_0^\infty \frac{u\,du}{z^2+u^2}\left[\frac{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}{(e^{\pi u}+e^{-\pi u})^2-4\cos^2(\lambda\pi)}\right],$$

ou encore par

$$\int_0 \frac{\operatorname{sh}(\lambda-\frac{1}{2})u}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}u}\,e^{-zu}\,du=\tfrac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{z+\lambda}{2}\right)+\psi\left(\frac{z+2-\lambda}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\psi\left(\frac{z+1-\lambda}{2}\right)-\psi\left(\frac{z+1+\lambda}{2}\right)\right],$$

on a

$$\chi_{2n-1}(\lambda) = \frac{1}{2n}\frac{d}{d\lambda}[\chi_{2n}(\lambda)];$$

par conséquent $(-1)^n\chi_{2n-1}(\lambda)$ est positif dans l'intervalle $(0, \frac{1}{2})$, négatif dans l'intervalle $(\frac{1}{2}, 1)$.

88. On connaît le rôle que les polynomes de Bernoulli jouent dans la théorie de la formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin. Les polynomes $\chi_n(\lambda)$ jouent un rôle analogue dans la formule de Boole (*Treatise on differential equations*, Chap. VI, p. 13; 1859) :

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) = {} & \frac{2(2^2-1)\,B_1}{1.2}[f'(x+h)+f'(x)]\,h \\ & - \frac{2(2^4-1)\,B_2}{1.2.3.4}[f'''(x+h)+f'''(x)]\,h^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{n-1}\frac{2(2^{2n}-1)\,B_n}{1.2.3\ldots(2n)}[f^{(2n-1)}(x+h)+f^{(2n-1)}(x)]\,h^{2n-1} \\ & + \mathfrak{R}_n, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{R}_n = \frac{h^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n)}\int_0^1 \chi_{2n}(u)\,f^{(2n+1)}(x+hu)\,du,$$

$$\mathfrak{R}_n = \frac{(-1)^n h^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+2)}\,4(2^{2n+2}-1)\,B_{n+1}\,f^{(2n+1)}(x+\xi h),\quad 0<\xi<1.$$

NOTE.

1. Nous avons vu (nos 68-70) que, lorsque la série

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

est convergente, la fonction $F(z)$ est égale au quotient de deux fonctions entières de $t = 1 : z$.

Nous nous proposons actuellement de trouver tous les cas dans lesquels $F(z)$ est une fonction de t qui est méromorphe dans tout le plan.

Puisque

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{t\,d\Phi(u)}{1+ut},$$

il est clair que, pour cela, il faut et il suffit que la distribution de masse représentée par $\Phi(u)$ se réduise à une concentration de masses

$$(m_i, \xi_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

en des points

$$\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > \xi_4 > \ldots > \lim \xi_n = 0,$$

se rapprochant indéfiniment de l'origine, à laquelle peut s'ajouter encore une masse finie C placée à l'origine. Les m_i sont seulement assujettis à la condition que la série

$$\sum_1^\infty m_i$$

doit être convergente.

Nous avons remarqué (no 48) que, lorsqu'un intervalle (a, b) ne contient point de masse dans la distribution représentée par $\Phi(u)$, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne peut jamais avoir deux racines dans cet intervalle : le nombre des racines dans cet intervalle ne peut être que 0 ou 1. Il s'ensuit que, dans le cas actuel, le nombre des racines plus grandes qu'un nombre quelconque positif l reste toujours fini et ne peut pas surpasser le nombre fini des nombres

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots$$

qui surpassent l.

Avant d'aller plus loin, faisons quelques remarques sur la manière dont se comportent les racines

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n$$

de l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

et cela dans le cas général. Nous supposons ces racines rangées par ordre de grandeur décroissante : x_1 sera la plus grande racine, et $x_1, x_2, \ldots$ croissent avec n.

Il peut arriver que x_1 croît au delà de toute limite, mais alors $x_2, x_3, \ldots, x_k$ croissent aussi au delà de toute limite nécessairement.

En effet, supposons d'abord

$$\lim x_1 = \infty, \qquad \lim x_2 = \lambda,$$

λ étant un nombre fini. Il est clair d'abord que la masse M_1 correspondant à la racine x_1 tendra vers zéro, car

$$M_1 x_1 < c_1.$$

D'autre part, $x_2, x_3, \ldots$ restent toujours inférieurs à λ : on aurait donc

$$\varphi_n(\lambda) = \frac{1}{a_1} - M_1$$

et

$$\lim \varphi_n(\lambda) = \Phi(\lambda) = \frac{1}{a_1}.$$

La fonction $\Phi(u)$ serait donc constante dans tout l'intervalle (λ, ∞), mais alors aucune racine de

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne peut être plus grande que λ. Cette contradiction montre qu'il n'est pas possible que x_1 seule croisse au delà de toute limite. Et, de la même façon, on verra qu'il est impossible qu'un nombre fini de racines croisse au delà de toute limite, en sorte qu'on aurait

$$\lim x_1 = \lim x_2 = \ldots = \lim x_k = \infty.$$
$$\lim x_{k+1} = \lambda.$$

Nous pouvons donc dire que le nombre des racines qui croissent au delà de toute limite ne peut être que 0 ou ∞.

Supposons maintenant

$$\lim x_1 = \lambda,$$

λ étant un nombre fini. Il peut arriver que x_1 soit la seule racine qui tende vers λ, en sorte que

$$\lim x_2 = \lambda' < \lambda.$$

Mais nous allons montrer que, lorsque

$$\lim x_2 = \lambda,$$

alors nécessairement $x_3, x_4, x_5, \ldots,$ tendent aussi vers λ. Autrement, le nombre des racines qui tendent vers λ ne peut être que 1 ou ∞.

Supposons en effet

$$\lim x_1 = \lim x_2 = \ldots = \lim x_k = \lambda,$$
$$\lim x_{k+1} = \lambda' < \lambda.$$

On peut prendre d'abord n assez grand pour que les k plus grandes racines de

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

soient toutes comprises entre λ' et λ. Ensuite on pourra prendre n' assez grand pour que les k plus grandes racines de

$$Q_{2n+2n'}(-z) = 0$$

soient comprises entre la plus grande racine de

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

et λ. Mais il est clair qu'alors les k plus grandes racines de

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

seraient toutes comprises dans l'intervalle de deux racines consécutives de

$$Q_{2n+2n'}(-z) = 0.$$

Or nous savons que cela est impossible, à moins qu'on n'ait $k = 1$.

Si x_1 est la seule racine qui tend vers λ, on aura

$$\lim x_2 = \lambda' < \lambda.$$

et l'on verra de la même façon que le nombre des racines qui tendent vers λ' ne peut être que 1 ou ∞. Dans le premier cas, on aura

$$\lim x_3 = \lambda'' < \lambda',$$

et l'on voit encore que le nombre des racines qui tendent vers λ'' ne peut être que 1 ou ∞, et ainsi de suite.

3. Revenons maintenant au cas du n° 1, c'est-à-dire supposons que la fonction $\Phi(u)$ affecte la forme particulière que nous avons indiquée. Nous allons montrer qu'on a alors nécessairement

$$\lim b_{2n-1} = \lim b_{2n} = 0.$$

Soit, en effet, ε un nombre positif aussi petit qu'on voudra. Parmi les nombres

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \ldots,$$

il y en a seulement un nombre fini k qui soient plus grands que ε. Parmi les racines de

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ seules *peuvent* surpasser ε, mais x_{k+1} est certainement inférieur à $\xi_{k+1} < \varepsilon$. Ensuite ces racines $x_1, x_2, \ldots, x_k$ en nombre fini tendent certainement pour

$n = \infty$ vers des limites finies. Désignons maintenant par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$ les racines de

$$Q_{2n+2}(-z) = 0,$$

on aura

$$x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_{n+1} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n+1},$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \quad = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n-1},$$

donc

$$\sum_1^k (x'_r - x_r) + \sum_{k+1}^n (x'_r - x_r) + x'_{n+1} = b_{2n} + b_{2n+1}.$$

Or, si l'on se rappelle que les racines x'_k sont séparées par les racines x_k, il est clair que

$$\sum_{k+1}^n (x'_r - x_r) + x'_{n+1} < \varepsilon,$$

car

$$\sum_{k+1}^n (x'_r - x_r) + \sum_{k+1}^n (x_r - x'_{r+1}) + x'_{n+1} = x'_{k+1} < \varepsilon,$$

et $x_r - x'_{r+1}$ est positif. D'autre part, la somme

$$\sum_1^k (x'_r - x_r)$$

peut être rendue aussi petite qu'on voudra, par exemple inférieure à ε, en prenant n suffisamment grand; il vient donc

$$b_{2n} + b_{2n+1} < 2\varepsilon,$$

et les quantités b_n tendent vers zéro.

Ainsi, pour que la fonction $F(z)$ soit méromorphe en $t = \frac{1}{z}$, il faut certainement que b_n tende vers zéro.

4. Nous allons montrer maintenant que cette condition est aussi suffisante et que, toutes les fois qu'on a

$$\lim b_{2n-1} = \lim b_{2n} = 0,$$

$F(z)$ est bien méromorphe en z^{-1}.

Pour cela, nous allons faire voir d'abord que ces conditions entraînent cette conséquence :

Le nombre des racines de

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

qui surpasse un nombre positif quelconque l, ne croît pas au delà de toute limite, mais reste invariable dès que n surpasse une certaine limite.

Considérons la suite des fonctions

$$(\alpha) \qquad Q_0(z), \quad Q_2(z), \quad Q_4(z), \quad \ldots, \quad Q_{2n}(z), \quad \ldots,$$

il s'agit de faire voir que le nombre des racines d'une équation

$$Q_{2n}(z) = 0,$$

qui sont comprises entre $-l$ et $-\infty$, finit par être constant.

Or, ce nombre est égal au nombre des variations perdues, en posant, dans la suite,

$$Q_0(z), \quad Q_2(z), \quad \ldots, \quad Q_{2n}(z),$$

d'abord $z = -\infty$, ensuite $z = -l$. Mais, pour $z = -\infty$, on n'a que des variations; tout revient donc à montrer que, pour $z = -l$, la suite (α) n'a qu'un nombre fini de permanences, c'est-à-dire qu'on ne rencontre que des variations dès que n surpasse une certaine limite.

Pour cela, revenons à la relation entre trois fonctions consécutives; on peut l'écrire

$$b_{2n-1} Q_{2n}(z) = (z + b_{2n-2} + b_{2n-1}) Q_{2n-2}(z) - b_{2n-2} Q_{2n-4}(z).$$

Posons

$$\lambda_n = -\frac{Q_{2n-2}(-l)}{Q_{2n}(-l)},$$

il viendra

$$\frac{1}{\lambda_n} + 1 = \frac{l - (1 + \lambda_{n-1}) b_{2n-2}}{b_{2n-1}}.$$

D'après l'hypothèse, on a

$$\lim b_{2n-2} = \lim b_{2n-1} = 0;$$

donc, dès que n surpasse un certain nombre ν, on aura certainement

$$\frac{l - 2 b_{2n-2}}{b_{2n-1}} > 2,$$

parce que le nombre positif l n'est pas nul. Nous supposerons maintenant $n > \nu$. On voit alors que si $\lambda_{n-1} \leqq 1$ certainement λ_n sera positif et compris entre 0 et 1, c'est-à-dire qu'on aura aussi $\lambda_n < 1$, et, par suite, tous les nombres

$$\lambda_n, \quad \lambda_{n+1}, \quad \lambda_{n+2}, \quad \ldots$$

seront *positifs*, plus petits que l'unité.

Mais supposons la valeur de λ_{n-1} quelconque et calculons la suite des quantités

$$\lambda_{n-1}, \quad \lambda_n, \quad \lambda_{n+1}, \quad \lambda_{n+2}, \quad \ldots.$$

Nous distinguons divers cas qui épuisent tous les cas possibles.

L'un des nombres λ_k est infini, $\lambda_m = \infty$, alors $\lambda_{m+1} = 0 < 1$, et, par conséquent, *tous* les nombres

$$\lambda_{m+2}, \quad \lambda_{m+3}, \quad \lambda_{m+4}, \quad \ldots$$

sont *positifs*, plus petits que l'unité.

Si aucun des nombres λ_k n'est infini, ils seront tous finis, et ils seront :

Ou bien tous > 1; alors il est évident qu'ils sont aussi tous positifs.

Ou bien on en trouvera un $\lambda_m \leqq 1$, et alors nous avons vu que

$$\lambda_{m+1}, \quad \lambda_{m+2}, \quad \lambda_{m+3}, \quad \ldots$$

sont tous *positifs,* plus petits que l'unité.

Ainsi, dans tous les cas, les nombres λ_k sont constamment *positifs* dès que k surpasse une certaine limite. Il est évident, d'après ce qui précède, que nous avons établi ainsi la proposition que le nombre des racines de

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

qui surpassent un nombre positif quelconque l, ne croît pas au delà de toute limite, mais reste invariable dès que n surpasse une certaine limite.

5. Il est facile maintenant d'achever la démonstration. La racine x_1 tendra vers une limite finie ξ_1, et c'est la seule racine qui tend vers cette limite, car le nombre des racines qui tendent vers ξ_1 est 1 ou ∞, mais il ne peut être ∞, parce que nous savons que le nombre des racines qui surpasse un nombre l est fini. Ensuite x_2 tendra vers une limite $\xi_2 < \xi_1$, et ce sera la seule limite qui tend vers ξ_2, et ainsi de suite. Généralement, on a

$$\lim x_k = \xi_k$$

et

$$\xi_k > \xi_{k+1}.$$

La masse M_1 correspondante à x_1 tendra vers une limite $m_1 \geqq 0$ en diminuant toujours, mais il est facile de voir qu'on ne peut pas avoir $m_1 = 0$.

En effet, on voit facilement que, dans ce cas, la fonction $\Phi(u)$ serait constante à partir de $u = \xi_2 < \xi_1$, mais alors aucune racine ne surpasserait ξ_2, et la racine qui tend vers ξ_1 n'existerait pas. De même, la masse M_2 correspondante à x_2 tendra vers une limite m_2 qui n'est pas nulle. En effet, nous savons que $M_1 + M_2$ diminue toujours; cette somme tend donc vers une limite, et il en est donc de même de M_2. On ne peut pas avoir $m_2 = 0$, car, alors, il est aisé de voir que la fonction $\Phi(u)$ serait constante dans tout l'intervalle (ξ_3, ξ_1), et cet intervalle ne pourrait pas renfermer les deux racines x_1 et x_2 qui tendent respectivement vers ξ_1 et ξ_2, et ainsi de suite.

Il est clair que $\varphi_n(u)$ tend toujours vers une limite finie pour $n = \infty$, et cette limite est dès lors $= \Phi(u)$. Et cette fonction $\Phi(u)$ affecte bien la forme particulière indiquée plus haut (n° **1**), en sorte que $F\left(\frac{1}{t}\right)$ est une fonction méromorphe de t.

Ainsi, pour que $F\left(\frac{1}{z}\right)$ soit une fonction méromorphe dans tout le plan, il faut et il suffit qu'on ait

$$\lim b_{2n-1} = \lim b_{2n} = 0.$$

SUR

L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial z},$$

PAR M. E. LACOUR,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis.

INTRODUCTION.

L'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

dans laquelle u désigne une fonction de x, y, t, et k une constante positive, se présente dans la théorie de la chaleur quand on étudie comment varie avec le temps la température d'un plan indéfini. On donne à cette équation, en posant $kt = z$, une forme un peu plus simple

$$\delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

J'étends à cette équation quelques-uns des résultats donnés par M. Appell dans une Note *Sur l'équation* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (*Journal de Mathématiques* de Jordan, p. 187).

On peut trouver par un calcul direct toutes les transformations qui conservent à l'équation $\delta u = 0$ sa forme. On applique l'une de ces transformations aux polynomes entiers en x, y, z qui satisfont à l'équation $\delta u = 0$.

En considérant, en même temps que l'équation $\delta u = 0$, l'équation ad-

Φ désignant une forme quadratique dont le discriminant est le hessien de la fonction $U(X, Y, Z)$.

On obtient des expressions analogues pour $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$, puis pour $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$. Si l'on substitue dans δu les expressions de $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ et δU et si l'on divise par λ le résultat de cette substitution, on obtient l'équation transformée sous la forme

$$\begin{aligned}
&U\frac{\delta\lambda}{\lambda} + \frac{\partial U}{\partial X}\delta X + \frac{\partial U}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial U}{\partial Z}\delta Z \\
&+ \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \\
&+ \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right] \\
&+ \frac{2\,\partial^2 U}{\partial Y\,\partial Z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \frac{2\,\partial^2 U}{\partial Z\,\partial X}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial y}\right) + \frac{2\,\partial^2 U}{\partial X\,\partial Y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

En identifiant cette équation transformée avec

$$\delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{\partial U}{\partial Z},$$

on trouve

$$\delta\lambda = 0, \tag{1}$$

$$\delta X + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 = 0, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 = -\left(\delta Z + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial y}\right); \tag{6}$$

il faut joindre à ces équations trois autres qui se déduisent de (2), (3) et (6), en y remplaçant X par Y, et que nous désignerons par (2)', (3)', (6)'.

1(*b*). — Nous avons donc à étudier un système de neuf équations; mais ce système se simplifie beaucoup si l'on se limite au cas des fonctions

réelles. Dans ce cas, l'équation (5) donne les conditions

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = 0.$$

qui font déjà disparaître les équations (3) et (3)'.

Si l'on écrit les équations (6) et (6)', en tenant compte de ces nouvelles conditions, et, si l'on en rapproche l'équation (4), on a un système d'équations en X et Y, savoir

(6) $$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial Z}{\partial z},$$

(6)' $$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial Z}{\partial z},$$

(4) $$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

d'où l'on peut conclure, comme nous allons le voir, les identités

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0.$$

En effet, d'après (6), $\frac{\partial Z}{\partial z}$ est positif; nous pouvons poser

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = R^2;$$

puis, en tenant compte de (6) et (6)',

$$\frac{\partial X}{\partial x} = R\cos\alpha, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = R\sin\alpha,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = R\cos\beta, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = R\sin\beta.$$

Alors la condition (4) devient

$$\cos(\beta - \alpha) = 0$$

ou

$$\beta - \alpha = \pm\frac{\pi}{2}.$$

En prenant $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, nous trouvons

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -R\sin\alpha, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = R\cos\alpha$$

et, par suite,

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x};$$

et l'on sait que ces égalités entraînent

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0.$$

Si l'on prenait $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$, les résultats se déduiraient des précédents en changeant Y en $-$ Y.

On peut démontrer que α est indépendant de x et de y : en effet, les identités

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) = 0$$

donnent, en se rappelant que R ne dépend que de z,

$$-\sin\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \cos\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0,$$

$$\cos\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0$$

et, par suite,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0.$$

Ainsi α est indépendant de x, y et, puisqu'on a posé,

$$\frac{\partial X}{\partial x} = R\cos\alpha, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -R\sin\alpha,$$

R dépendant seulement de z, on voit que X *et* Y *sont des fonctions linéaires de x et y dont les coefficients sont fonctions de z.*

I (c). — On en conclut d'abord que δX et δY se réduisent respectivement à $-\frac{\partial X}{\partial z}$ et à $-\frac{\partial Y}{\partial z}$. Alors les équations (2) et (3) deviennent, en posant $2\operatorname{Log}\lambda = \mu$,

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}.$$

Nous pouvons éliminer μ entre ces deux équations, en les résolvant par

rapport à $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$ et en écrivant que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right).$$

Détaillons ce calcul.

D'abord, en tenant compte des relations

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=-\frac{\partial X}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial x},$$

on peut dans les premiers membres des équations en $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$ ne garder que l'une des fonctions X et Y, par exemple, X. Les deux équations deviennent

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$-\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial z},$$

et, comme

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2=\frac{\partial Z}{\partial z},$$

on obtient, en résolvant,

$$\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial y},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial x}.$$

Différentions par rapport à y les deux membres de la première équation, puis, par rapport à x, les deux membres de la seconde équation, nous trouvons successivement

$$\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 X}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial y},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial^2 X}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial x};$$

en retranchant membre à membre, il vient

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial^2 X}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial z}=0.$$

1 (d). — En tenant compte des résultats obtenus dans les deux paragraphes précédents, nous allons pouvoir calculer successivement $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$ et remonter de là à λ. L'égalité qui donne $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, savoir

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial y}$$

montre que $\frac{\partial\mu}{\partial x}$ contient x et y au premier degré; dans le second membre, le coefficient de y est nul à cause de l'identité que nous avons rencontrée

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial^2 X}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial x} = 0;$$

donc $\frac{\partial\mu}{\partial x}$ est de la forme

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = px + q,$$

p et q ne dépendant que de z; on en déduit

$$\mu = \frac{px^2}{2} + qx + \psi(y, z);$$

on voit de même la forme de μ considéré comme fonction de y, et on en conclut

$$\tfrac{1}{2}\mu = \operatorname{Log}\lambda = Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

les coefficients A, C, D, E, F ne dépendant que de z. On a par suite

$$\lambda = e^{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F}.$$

Il reste à déterminer les fonctions inconnues de z en écrivant que λ vérifie l'équation

$$\delta(\lambda) = \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} - \frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0.$$

Comme l'on a

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \lambda(2Ax + D), \qquad \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} = \lambda(2Ax + D)^2 + 2A\lambda,$$

on voit que l'équation $\delta\lambda = 0$ donne

$$(2Ax + D)^2 + (2Cy + E)^2 + 2A + 2C \equiv A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F',$$

et l'on trouve ainsi, pour déterminer A, C, ..., les équations

$$A' = 4A^2, \qquad C' = 4C^2,$$
$$D' = 4AD, \qquad E' = 4CE, \qquad F' = D^2 + E^2 + 2A + 2C.$$

Ces équations s'intègrent aisément; on obtient

$$A = -\frac{1}{4(z+h)}, \qquad C = -\frac{1}{4(z+k)},$$
$$D = \frac{a}{2(z+h)}, \qquad E = \frac{b}{2(z+k)},$$
$$F = -\frac{a^2}{4(z+h)} - \frac{b^2}{4(z+k)} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}(z+h) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}(z+k),$$

a, b, h et k désignant des constantes, et il en résulte pour λ l'expression

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(z+h)(z+k)}}\, e^{-\frac{1}{4(z+h)}(x-a)^2 - \frac{1}{4(z+k)}(y-b)^2}.$$

4 (c). — Nous pouvons maintenant achever de déterminer X et Y; X satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Log}\lambda + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Log}\lambda - \frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial z} = 0,$$

ou, en remplaçant λ par sa valeur,

$$\frac{x-a}{z+h}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{y-b}{z+k}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} = 0.$$

En appliquant la méthode ordinaire pour intégrer les équations linéaires aux dérivées partielles, on trouve que l'intégrale de cette équation est donnée par

$$X = f(u, v), \qquad u = \frac{x-a}{z+h}, \qquad v = \frac{y-b}{z+k},$$

$f(u, v)$ désignant une fonction arbitraire de deux variables. La vérifica-

tion de ce résultat s'aperçoit immédiatement en comparant

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{z+h}\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{1}{z+k}\frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = -\frac{x-a}{(z+h)^2}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y-b}{(z+k)^2}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Nous savons, d'autre part, que X est linéaire en x, y. Donc X est de la forme

$$X = P\frac{x-a}{z+h} + Q\frac{y-b}{z+k} + X_0;$$

de même

$$Y = P_1\frac{x-a}{z+h} + Q_1\frac{y-b}{z+k} + Y_0,$$

P, Q, X_0, P_1, Q_1, Y_0 étant des constantes. Enfin les relations entre les dérivées de X et de Y donnent

$$\frac{P_1}{z+h} = -\frac{Q}{z+k}, \qquad \frac{Q_1}{z+k} = \frac{P}{z+h}$$

et, par suite,

$$k = h, \qquad P_1 = -Q, \qquad Q_1 = P.$$

Posons

$$P = \rho\cos\alpha, \qquad Q = +\rho\sin\alpha;$$

alors, d'après l'équation (6),

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\rho^2}{(z+h)^2}, \qquad Z - Z_0 = -\frac{\rho^2}{z+h}.$$

Nous trouvons, en définitive,

$$X - X_0 = \rho\left(\frac{x-a}{z+h}\cos\alpha + \frac{y-b}{z+h}\sin\alpha\right),$$

$$Y - Y_0 = \rho\left(-\frac{x-a}{z+h}\sin\alpha + \frac{y-b}{z+h}\cos\alpha\right),$$

$$Z - Z_0 = -\frac{\rho^2}{z+h}.$$

Ainsi la substitution la plus générale conservant à l'équation $\delta u = 0$ *sa forme est*

$$u = C\frac{1}{z+h}e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{4(z+h)}}U(X, Y, Z),$$

C, a, b, h désignant des constantes et X, Y, Z ayant les expressions données par les formules précédentes.

2. *Cette substitution générale est composée avec les substitutions simples*

$$u = CU, \qquad X = \rho x, \qquad Y = \rho y, \qquad Z = \rho^2 z,$$

$$u = U\frac{1}{z}e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}}, \qquad X = \frac{x}{z}, \qquad Y = \frac{y}{z}, \qquad Z = -\frac{1}{z},$$

auxquelles il faut joindre les substitutions correspondant à une transformation des coordonnées.

Remarquons encore cette conséquence des formules précédentes : si $f(x, y, z)$ est une solution de l'équation $\delta u = 0$, on a une autre solution en considérant la fonction

$$\frac{1}{z}e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}}f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, -\frac{1}{z}\right).$$

3. L'identité

$$\delta(uv) = u\,\delta v + v\,\delta u + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

se réduit, dans le cas où u est indépendant de y et v indépendant de x, à la suivante :

$$(7) \qquad \delta(uv) = u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Donc, en multipliant une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

par une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

(et en supposant u indépendant de y, v indépendant de x), on a une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Cela se vérifie immédiatement sur l'exemple

$$u = e^{ax+a^2z}, \qquad v = e^{by+b^2z}, \qquad uv = e^{ax+by+(a^2+b^2)z}.$$

Si l'on développe e^{ax+a^2y} suivant les puissances de a

$$e^{ax+a^2z} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{a^\nu}{1 2 - \nu} V_\nu(x, z);$$

on sait que les coefficients $V_\nu(x, z)$ sont des polynomes entiers en x et z homogènes et du degré ν par rapport à x et $\sqrt{z}$, et qui vérifient l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. On a

$$V_n(x, z) = x^n + n(n-1)x^{n-2}\frac{z}{1} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}\frac{z^2}{1.2} + \ldots$$

ou encore, en posant $\varphi(x) = x^n$,

$$V_n(x, z) = \varphi(x) + \varphi''(x)\frac{z}{1} + \ldots + \varphi^{(2k)}(x)\frac{z^k}{1.2\ldots k} + \ldots.$$

De même, $V_n(y, z)$ vérifie l'équation $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0$. D'après cela, si l'on pose

$$u = V_p(x, z)\, V_q(y, z),$$

u est une solution de l'équation $\delta u = 0$. De plus, u est un polynome entier en x, y, z homogène et du degré $p + q$ en x, y et $\sqrt{z}$.

Or si l'on cherche, par la méthode des coefficients indéterminés, le polynome le plus général entier en x, y, z homogène et du degré n en x, y, $\sqrt{z}$ vérifiant l'équation $\delta u = 0$, on trouve de suite que ce polynome contient linéairement $n + 1$ constantes arbitraires, puisque les coefficients du développement

$$u(x, y, 0) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 \frac{z^2}{1 2} + \ldots$$

peuvent être calculés au moyen de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

dès que l'on connaît le polynome homogène et de degré n en x, y auquel se réduit u pour $z = 0$.

D'après cela, on peut prendre pour le polynome cherché l'expression

$$V_n(x, y, z) = \sum_{p=0}^{p=n} A_p V_p(x, z) V_q(y, z) \qquad (p + q = n),$$

les lettres A_0, A_1, ..., A_n désignant $n + 1$ constantes arbitraires.

Effectuons sur ce polynome la transformation du n° 2, nous trouvons une fonction

$$V_{-(n+2)}(x, y, z) = \frac{1}{z} e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}} V_n\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} - \frac{1}{z}\right),$$

qui est homogène et du degré $-(n+2)$ en x, y et $\sqrt{z}$, et qui est aussi une solution de l'équation $\delta u = 0$.

4. La notion d'équation adjointe, due à Riemann, conduit à l'extension du théorème de Green (voir *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, de M. Darboux, t. II, chap. IV). Si l'équation différentielle considérée est

$$\delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

l'équation adjointe est

$$\delta' v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Il est facile de retrouver, dans ce cas particulier, l'extension du théorème de Green. Une intégration par parties donne l'égalité

$$\int u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = u \frac{\partial v}{\partial x} - \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx,$$

et, en échangeant u et v,

$$\int v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = v \frac{\partial u}{\partial x} - \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx.$$

En retranchant membre à membre ces deux égalités, on fait disparaître les intégrales du second membre, et en intégrant par rapport à y, puis par rapport à z,

$$\iiint \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dx\, dy\, dz = \int \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}\right) dy\, dz,$$

de même

$$\iiint \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy\, dz = \int \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dz.$$

Ajoutons les premiers membres et introduisons δu et $\delta' v$, de telle façon

que les termes ajoutés donnent une différentielle exacte, nous trouvons

$$\iiint (u\,\delta' v - v\,\delta u)\,dx\,dy\,dz - \iiint \left(u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

En définitive, si l'on considère un volume V limité par une surface S, on a l'égalité suivante, donnant l'extension à l'équation $\delta u = 0$ du théorème de Green,

$$(8)\quad \iiint_{(V)} (u\,\delta' v - v\,\delta u)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \iint_{(S)} \left[\left(u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy\,dz + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dz + uv\,dx\,dy\right],$$

l'intégrale triple étant étendue au volume V et l'intégrale double à la surface S, et la définition de ces intégrales étant précisée comme elle l'est dans la démonstration du théorème de Green (¹).

L'intégrale triple qui figure dans la formule générale disparaît quand on prend pour u et v des fonctions qui, dans le volume V, sont finies, continues et admettent les dérivées qui figurent dans la formule et vérifient les équations

$$\delta u = 0, \qquad \delta' v = 0,$$

et la formule devient

$$(9)\quad \iint_{(S)} \left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy\,dz + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dz + uv\,dx\,dy\right] = 0.$$

5. Appliquons cette formule au cas où la surface S est un cylindre de révolution autour de l'axe Oz limité par les deux plans

$$z = z_1, \qquad z = z_2,$$

et où l'on prend

$$u = \frac{1}{z} e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}}, \qquad v = V_n(x, y, -z) \qquad (z > 0),$$

de sorte que l'on a bien

$$\delta u = 0, \qquad \delta' v = 0.$$

Nous remarquerons d'abord que la formule (9) peut s'écrire

$$\iint_{(S)} \left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(n, x) + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n, y) + uv\cos(n, z)\right] d\sigma = 0.$$

(¹) *Voir* Émile Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 138.

en désignant par $d\sigma$ un élément de la surface, par $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$ les cosinus des angles que fait avec Ox, Oy, Oz la normale en un point de l'élément quand on prend comme direction positive sur cette normale la direction suivie sur cette normale par un mobile qui traverserait l'élément de surface en allant de l'intérieur à l'extérieur du volume considéré.

L'intégrale double est étendue à la surface totale du cylindre. Considérons d'abord les deux bases; nous supposerons z_1 et z_2 positifs et $z_2 > z_1$, de sorte que z_2 correspond à la base supérieure B_2 et z_1 à la base inférieure B_1. Soient I_1 et I_2 les parties de l'intégrale double qui sont données par les bases B_1 et B_2. Pour la base supérieure, on a constamment

$$z = z_2, \qquad \cos(n, x) = 0, \qquad \cos(n, y) = 0, \qquad \cos(n, z) = 1,$$

de sorte que I_2 est donné par l'égalité

$$I_2 = \int\int_{B_2} u_2 v_2 \, dx \, dy,$$

en posant

$$u_2 = \frac{1}{z_2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4z_2}}, \qquad v_2 = V_n(x, y, -z_2).$$

Pour la base inférieure, on a constamment

$$z = z_1, \qquad \cos(n, x) = 0, \qquad \cos(n, y) = 0, \qquad \cos(n, z) = -1,$$

de sorte que

$$I_1 = -\int\int_{B_1} u_1 v_1 \, dx \, dy,$$

en désignant par u_1 et v_1 ce que deviennent u et v quand on y fait $z = z_1$.

Quant à la partie I_l de l'intégrale correspondant à la surface latérale, nous allons démontrer qu'elle tend vers zéro quand le rayon R du cylindre augmente indéfiniment. Posons

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta,$$

il en résulte

$$d\sigma = R \, d\theta \, dz, \qquad u = \frac{1}{z} e^{\frac{-R^2}{4z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{2z^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}} = -\frac{R\cos\theta}{2z^2} e^{\frac{-R^2}{4z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{2z^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}} = -\frac{R\sin\theta}{2z^2} e^{\frac{-R^2}{4z}},$$

$v = V_n(x, y, -z)$ devient un polynome entier en R; il en est de même pour $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$.

D'après cela, l'intégrale I_l prend la forme

$$I_l = \int_0^{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} P \, d\theta \, dz,$$

P étant une somme de termes dont chacun est le produit de l'exponentielle $e^{\frac{-R^2}{4z}}$ par un facteur qui devient infini comme une puissance déterminée de R quand R augmente indéfiniment. Donc chacun des termes de P tend vers zéro quand R augmente indéfiniment. Il en est de même de P et, comme le champ de l'intégration est limité, puisque l'on a

$$z_1 < z < z_2,$$
$$0 < \theta < 2\pi,$$

l'intégrale I_l elle-même tend vers zéro quand R augmente indéfiniment. La formule se réduit à

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 v_1 \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 v_2 \, dx \, dy.$$

Pour faire sortir z de chacune des intégrales, posons

$$\frac{x}{\sqrt{z}} = \alpha, \qquad \frac{y}{\sqrt{z}} = \beta,$$

en nous rappelant que z reste constamment positif, il vient

$$\frac{dx \, dy}{z} = d\alpha \, d\beta,$$

$$u = \frac{1}{z} e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}},$$

$$v = z^{\frac{n}{2}} V_n(\alpha, \beta, -1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uv \, dx \, dy = z^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}} V_n(\alpha, \beta, -1) \, d\alpha \, d\beta.$$

Si, dans cette dernière égalité, on fait successivement $z = z_1$, puis

$z = z_2$, les valeurs que prend le premier membre sont égales, d'après la formule (10). On a donc

$$\left(z_2^{\frac{n}{2}} - z_1^{\frac{n}{2}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}}\,V_n(\alpha, \beta, -1)\,d\alpha\,d\beta = 0,$$

et comme z_1 et z_2 sont différents

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}}\,V_n(\alpha, \beta, -1)\,d\alpha\,d\beta = 0.$$

Cette égalité peut se déduire d'une formule de M. Hermite (*Comptes rendus*, t. LVIII). Soient

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad \delta = ac - b^2$$

et ψ la forme adjointe de $\varphi(x, y)$, les polynomes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$ de M. Hermite sont définis par les égalités

$$e^{-h(ax+by)-h_1(bx+cy)} = e^{\frac{1}{2}\varphi(h, h_1)}\sum \frac{h^m}{(m)}\frac{h_1^n}{(n)}U_{m,n},$$
$$e^{kx+k_1y} = e^{\frac{\psi(k, k_1)}{2\delta}}\sum \frac{k^m}{(m)}\frac{k_1^n}{(n)}V_{m,n},$$

et la formule que nous voulons rappeler est

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x, y)}\,U_{m,n}V_{p,q}\,dx\,dy = 0.$$

Comme $V_{00} = 1$, un cas particulier de cette formule est

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x, y)}\,U_{m,n}\,dx\,dy = 0.$$

6. Nous ferons encore une application de la formule

$$(9) \qquad 0 = \int\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(n, x)\,d\sigma + \int\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n, y)\,d\sigma + \int uv\cos(n, x)\,d\sigma,$$

déduite de la formule analogue à la formule de Green, en y supposant $\delta u = 0$ et $\delta' v = 0$.

Nous prendrons

$$v = \frac{1}{\zeta - z} e^{-\frac{(\lambda-x)^2+(\mu-y)^2}{4(\zeta-z)}}, \qquad u = f(x, y, z),$$

$f(x, y, z)$ étant par hypothèse une solution de $\delta u = 0$; quant à v, on vérifie immédiatement que l'on a $\delta' v = 0$. Nous étendrons l'intégrale à la surface totale d'un cylindre de révolution dont l'axe est donné par les équations

$$x - \lambda = 0, \qquad y - \mu = 0,$$

et dont le rayon est R.

Considérons d'abord la partie de l'intégrale qui correspond à la surface latérale; on aura

$$x = \lambda + \mathrm{R}\cos\theta, \qquad y = \mu + \mathrm{R}\sin\theta, \qquad d\sigma = \mathrm{R}\, d\theta\, dz,$$

de sorte que

$$v = \frac{1}{\zeta - z} e^{-\frac{\mathrm{R}^2}{4(\zeta - z)}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\mathrm{R}\cos\theta}{2(\zeta - z)^2} e^{-\frac{\mathrm{R}^2}{4(\zeta-z)}}.$$

Dans l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\int_{z_1}^{z_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(n, x)\, d\sigma,$$

le coefficient différentiel tend vers zéro quand R augmente indéfiniment, si l'on fait l'hypothèse que u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ restent finis quand x et y augmentent indéfiniment, et, comme le champ d'intégration est limité, l'intégrale elle-même tend vers zéro quand R augmente indéfiniment.

Il en est de même de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\int_{z_1}^{z_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n, y)\, d\sigma,$$

si l'on suppose que v et $\frac{\partial v}{\partial y}$ restent finis quand x et y augmentent indéfiniment, et, comme pour un point de la surface latérale on a $\cos(n, z) = 0$, on voit que la partie du second membre de la formule (9) qui correspond à la surface latérale du cylindre tend vers zéro quand le rayon augmente indéfiniment. Il reste à considérer les deux bases $z = z_1$ et $z = z_2$.

En raisonnant comme on l'a fait dans la première application de la même

formule, on voit que les valeurs correspondantes de l'intégrale

$$\int uv \cos(n, z)\, d\sigma$$

sont, en supposant $z_1 < z_2$,

$$\frac{1}{\zeta - z_2}\int\int_{B_2} e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4(\zeta-z_2)}} f(x, y, z_2)\, dx\, dy$$
$$- \frac{1}{\zeta - z_1}\int_{B_1} e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4(\zeta-z_1)}} f(x, y, z_1)\, dx\, dy,$$

de sorte qu'on a, en définitive,

$$\frac{1}{\zeta - z_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4(\zeta-z_1)}} f(x, y, z_1)\, dx\, dy$$
$$= \frac{1}{\zeta - z_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4(\zeta-z_2)}} f(x, y, z_2)\, dx\, dy,$$

ou, en remplaçant ζ par z, x et y par λ et μ,

$$(12) \qquad \frac{1}{z - z_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4(z-z_1)}} f(\lambda, \mu, z_1)\, d\lambda\, d\mu$$
$$= \frac{1}{z - z_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4(z-z_2)}} f(\lambda, \mu, z_2)\, d\lambda\, d\mu.$$

7. Rappelons les propriétés de la fonction $f(x, y, z)$, sur lesquelles on s'est appuyé dans la démonstration, on suppose que

$$u = f(x, y, z)$$

est une solution de $\delta u = 0$ admettant les dérivées qui figurent dans les formules pour toutes les valeurs de z satisfaisant aux inégalités

$$a \leqq z \leqq b,$$

c'est-à-dire pour tous les points d'une tranche comprise entre les plans parallèles $z = a$ et $z = b$. On suppose, en outre, que u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ restent finis quand x et y augmentent indéfiniment, ou, si ces fonctions deviennent infinies, que leurs produits par une exponentielle $e^{-k^2(x^2+y^2)}$ tendent vers zéro

pour x et y infinis, k étant une constante différente de zéro. Enfin on a pris

$$a < z_1 < z_2 < b.$$

et l'on a supposé ζ supérieure à la plus grande des valeurs considérées de z.

En supposant toutes ces hypothèses réalisées, on peut dire, d'après l'égalité (12), que la fonction

$$(13) \qquad F(x, y, z) = \frac{1}{z - z_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}{4(z-z_1)}} f(\lambda, \mu, z_1)\, d\lambda\, d\mu,$$

où l'on suppose que $z > z_1$ est indépendante de z_1. On aura, en particulier, puisqu'on peut faire $z_1 = a$,

$$F(x, y, z) = \frac{1}{z - a} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}{4(z-a)}} f(\lambda, \mu, a)\, d\lambda\, d\mu.$$

Mais, quand z tend vers z_1, l'intégrale (13) tend vers $4\pi f(x, y, z_1)$; cela se démontre rigoureusement par un raisonnement entièrement analogue à celui qui est donné, pour une fonction de deux variables $F(x, y)$, dans le Mémoire de M. Weierstrass, *Ueber Functionen einer reellen Veränderlichen* (*Sitzungsberichte*, p. 803; 1885).

On a donc la formule

$$f(x, y, z_1) = \frac{1}{4\pi(z_1 - a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, \mu, a)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}{4(z_1-a)}} d\lambda\, d\mu,$$

qui détermine la fonction $f(x, y, z)$ dans la tranche considérée, quand on connaît la valeur de la fonction sur la face $z = a$.

QUELQUES PROPRIÉTÉS

DES

SURFACES HARMONIQUES,

PAR M. L. RAFFY,

Maître de Conférences à l'École Normale supérieure
et à la Faculté des Sciences de Paris.

J'appelle *surfaces harmoniques* les surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme

$$ds^2 = [U(u) - V(v)](du^2 + dv^2),$$

qui a permis à Jacobi de trouver les lignes géodésiques des surfaces du second degré.

Les résultats du présent travail ([1]) sont de nature diverse, mais se groupent naturellement ensemble à raison de la similitude des procédés qui les fournissent. Nous déterminons d'abord les surfaces harmoniques dont les lignes d'égale courbure sont parallèles, puis celles qui sont réglées. Enfin nous étudions les surfaces pour lesquelles le problème des cercles géodésiques admet une intégrale quadratique.

([1]) Première Partie de mes *Recherches sur les surfaces harmoniques*, qui ont obtenu de l'Académie des Sciences une mention honorable dans le concours pour le prix Bordin (1892). L'auteur, ne devant pas se faire connaître, ne pouvait renvoyer à ses travaux antérieurs. La citation en sera faite en note, entre crochets. La deuxième Partie de ces *Recherches* a paru dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (4ᵉ série, t. X, p. 331; 1894), la troisième et dernière dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (3ᵉ série, t. XII, p. 145; 1895).

CHAPITRE I.

LA MÉTHODE DE L'INTÉGRALE QUADRATIQUE POUR LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES DONNÉS SOUS LA FORME DE GAUSS.

---

1. Nous prendrons pour point de départ une proposition due à M. Massieu, qui est capitale dans la théorie des surfaces harmoniques et qui peut s'énoncer ainsi ([1]) :

Théorème fondamental. — *Pour qu'une surface d'élément linéaire*

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 \tag{1}$$

soit harmonique, il faut et il suffit que l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta(u, v; p, q) = \frac{\mathrm{E}q^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{G}p^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} = 1, \tag{2}$$

dont dépend la détermination de ses géodésiques, admette une intégrale quadratique

$$\mathrm{I} = \mathrm{A}p^2 + 2\mathrm{B}pq + \mathrm{C}q^2 = \text{const.}, \tag{3}$$

dont le premier membre n'ait pas de facteur linéaire $\varepsilon p + \eta q$ *commun avec le trinome* $\mathrm{E}q^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{G}p^2$. *Si, pour une valeur convenable de la constante* S, *la forme* $\mathrm{I} - \mathrm{S}\Delta$ *est le carré d'une fonction linéaire de* p *et de* q, *la surface considérée est applicable sur une surface de révolution.*

Cette proposition fournit, on le voit, un moyen théorique de reconnaître si un élément linéaire donné est ou n'est pas harmonique. En effet, la condition connue pour que la relation (3) soit une intégrale de l'équation (2) est que l'on ait, pour toutes les valeurs de p et de q,

$$\frac{\partial\Delta}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial p} - \frac{\partial\Delta}{\partial p}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial u} + \frac{\partial\Delta}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial q} - \frac{\partial\Delta}{\partial q}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial v} = 0. \tag{4}$$

([1]) *Voir* Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, p. 30 à 34.

Le premier membre de cette équation est une forme binaire cubique en p et q. On égale à zéro les coefficients de p^3, p^2q, pq^2 et q^3, ce qui fournit *quatre* équations linéaires aux dérivées partielles entre les *trois* fonctions inconnues A, B et C des deux variables u et v et les coefficients E, F, G de l'élément linéaire. Il reste à reconnaître si ces équations admettent ou non des solutions communes.

Ce problème présente de grandes difficultés quand l'élément linéaire considéré dépend de fonctions inconnues. C'est ce qui arrive quand, s'étant donné seulement la forme analytique d'un élément linéaire, on veut déterminer les fonctions qui y entrent de manière à le rendre harmonique. Néanmoins on réussit parfois par l'emploi d'un procédé particulier que je vais indiquer (¹).

2. Soit un élément linéaire donné sous la forme de Gauss

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2;$$

l'équation aux géodésiques est ici

$$\Delta = \frac{q^2}{G} + p^2 = 1.$$

Soit, comme plus haut, l'intégrale quadratique cherchée

$$I = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = \text{const.}$$

Formant le crochet $|\Delta, I|$ dont l'évanouissement exprime que I est une intégrale de l'équation $\Delta = 1$, on arrive à l'identité

$$\begin{aligned} &q^2[(Ap + Bq)G'_u + (Bp + Cq)G'_v] \\ &\quad + Gq(A'_v p^2 + 2B'_v pq + C'_v q^2) + G^2 p(A'_u p^2 + 2B'_u pq + C'_u q^2) = 0; \end{aligned}$$

d'où, en égalant à zéro les coefficients des quatre termes de la forme cubique,

$$\begin{aligned} BG'_u + CG'_v + C'_v G &= 0, & A'_v G + 2B'_u G^2 &= 0, \\ AG'_u + BG'_v + 2B'_v G + C'_u G^2 &= 0, & A'_u G^2 &= 0. \end{aligned}$$

La dernière de ces équations montre que A *est une fonction de v seulement*. Nous écrirons donc désormais A' au lieu de A'_v, et nous mettrons les

(¹) [L. Raffy, *Sur une classe de surfaces harmoniques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 424; 1891)].

trois autres équations sous la forme suivante

$$BG'_u + (CG)'_v = 0, \tag{5}$$

$$AG'_u + G^2C'_u + 2\sqrt{G}(B\sqrt{G})'_v = 0, \tag{6}$$

$$A' + 2GB'_u = 0. \tag{7}$$

A la dernière ajoutons la première multipliée par 2; il vient

$$A' + 2(CG)'_v + 2(BG)'_u = 0.$$

Nous avons donc, en introduisant une nouvelle fonction inconnue μ,

$$A + 2CG = \frac{\partial \mu}{\partial u}, \tag{8}$$

$$2BG = -\frac{\partial \mu}{\partial v}. \tag{9}$$

Ainsi, quand on connaîtra A et μ, les deux fonctions B et C seront explicitement déterminées. Si l'on porte les valeurs (8) et (9) de C et de B dans les équations (5) et (7), elles se réduisent l'une et l'autre à

$$A' = G\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial \mu}{\partial v}\right). \tag{10}$$

Quant à l'équation (6), elle se transforme en celle-ci

$$AG'_u + \frac{G^2}{2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mu'_u - A}{G} - \sqrt{G}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\mu'_v}{\sqrt{G}} = 0. \tag{11}$$

Il suffira donc qu'on puisse trouver deux fonctions, l'une μ dépendant de u et de v, l'autre A dépendant seulement de v, qui vérifient le système (10) et (11) pour que l'équation aux géodésiques

$$\Delta \equiv p^2 + \frac{q^2}{G} = 1$$

admette une intégrale quadratique. La condition est d'ailleurs nécessaire.

3. En vue des applications qui vont suivre, nous écrirons le système précédent d'une manière un peu différente. Divisons les deux membres de l'équation (10) par G et intégrons par rapport à u; en introduisant une fonction W de v seulement, nous pourrons écrire

$$\frac{1}{G}\frac{\partial \mu}{\partial v} = W + A'\int\frac{du}{G}, \tag{10'}$$

et il viendra pour l'équation (11)

$$(11')\qquad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\mu'_u - 3A}{G} = \frac{2}{G\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left[\sqrt{G}\left(W + A'\int\frac{du}{G}\right)\right].$$

Si la fonction G est d'une forme analytique telle qu'on puisse effectuer au moyen de symboles explicites les deux quadratures dont dépendent les deux dérivées partielles μ'_u et μ'_v, on n'aura plus qu'à poser

$$\frac{\partial \mu'_u}{\partial v} = \frac{\partial \mu'_v}{\partial u},$$

pour obtenir l'unique équation du problème. Cette équation ne contiendra, en dehors de la fonction G et de fonctions connues introduites par l'intégration, que trois fonctions inconnues d'une seule variable v, savoir A, W et la fonction V_1 qui s'ajoute comme constante au second membre de l'équation (11') intégrée par rapport à u. La question se trouvera ainsi simplifiée, puisqu'on n'aura plus à déterminer que des fonctions d'une seule variable. Dans ce qui va suivre, l'application de ce procédé conduit à la solution complète des questions proposées.

4. *Remarque I.* — Quand on sait que la fonction A est constante, on peut la supposer nulle. En effet, quand A est constant, on a

$$A\left(p^2 + \frac{q^2}{G}\right) = A = \text{const.},$$

en même temps que l'intégrale quadratique

$$Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = \text{const.}$$

Il suffit de retrancher ces équations membre à membre pour obtenir une nouvelle intégrale

$$2Bpq + \left(C - \frac{A}{G}\right)q^2 = \text{const.},$$

où ne figure plus de terme en p^2, ce qui justifie notre assertion.

Remarque II. — Quand A est constant, s'il en est de même de μ, l'intégrale quadratique disparaît. En effet, puisqu'on peut faire $A = 0$, les équations (8) et (9) se réduisent actuellement à

$$C = 0, \qquad B = 0.$$

Comme A est nul aussi, l'intégrale quadratique cesse d'exister.

CHAPITRE II.

LES SURFACES HARMONIQUES A LIGNES D'ÉGALE COURBURE PARALLÈLES.

---

1. Le procédé de calcul indiqué au Chapitre précédent va nous donner une proposition importante pour la théorie des surfaces harmoniques et qu'il semble difficile d'établir autrement.

Théorème. — *Toute surface harmonique dont les lignes d'égale courbure sont parallèles est applicable sur une surface de révolution.*

L'élément linéaire des surfaces dont les lignes d'égale courbure $u=$ const. sont parallèles est de la forme

$$ds^2 = du^2 + \frac{(U-V)^2}{U'}dv^2,$$

et, pour qu'il convienne à une surface de révolution, il faut et il suffit que la courbure géodésique des courbes $u=$ const. soit indépendante de v :

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{U-V}{\sqrt{U'}} = \frac{U'}{U-V} - \frac{1}{2}\frac{U''}{U'} = f(u);$$

c'est-à-dire que la fonction V doit se réduire à une constante. Il n'y a d'exception que si la courbure totale de la surface est invariable, cas que notre analyse nous fournira. Or, pour que l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2 \tag{1}$$

soit réductible à la forme harmonique, il faut et il suffit (Chapitre I, n° 3) qu'on puisse, en choisissant convenablement les deux fonctions A et W de la seule variable v, satisfaire aux deux équations

$$\frac{1}{G}\frac{\partial\mu}{\partial v} = W + A'\int\frac{du}{G}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu_u - 3A}{G}\right) = \frac{2}{G\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left[\sqrt{G}\left(W + A'\int\frac{du}{G}\right)\right]. \tag{3}$$

2. Dans le cas présent, nous nous donnons

$$G = \frac{(U-V)^2}{U'}; \tag{4}$$

on peut alors effectuer la quadrature indiquée, et il vient

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} = \frac{(U-V)^2}{U'}\left(W - \frac{A'}{U-V}\right) = W\frac{(U-V)^2}{U'} - A'\frac{U-V}{U'}, \tag{2'}$$

d'où l'on déduit par différentiation

$$\frac{\partial\mu}{\partial u\,\partial v} = -W\frac{U''}{U'^2}(U-V)^2 + \left(2W + A'\frac{U''}{U'^2}\right)(U-V) - A'. \tag{5}$$

Quant à la formule (3), elle devient

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{U'(\mu'_u - 3A)}{(U-V)^2} = \frac{2U'}{(U-V)^3}\frac{\partial}{\partial v}[(U-V)W - A'] = 2\frac{U'W'}{(U-V)^2} - (V'W + A'')\frac{2U'}{(U-V)^3}.$$

L'intégration est immédiate; elle introduit une nouvelle fonction inconnue V_1 de v :

$$\frac{U'(\mu'_u - 3A)}{(U-V)^2} = V_1 - \frac{2W'}{U-V} + \frac{V'W + A''}{(U-V)^2}.$$

Nous avons donc la valeur explicite de μ'_u

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} = V_1\frac{(U-V)^2}{U'} - 2W'\frac{U-V}{U'} + \frac{V'W + A''}{U'} + 3A, \tag{3'}$$

ce qui nous fournit une nouvelle expression de la dérivée seconde

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial u\,\partial v} = V'_1\frac{(U-V)^2}{U'} - 2(V'V_1 + W'')\frac{U-V}{U'} + \frac{2V'W' + (V'W)' + A'''}{U'} + 3A'. \tag{6}$$

La seule condition d'existence de la fonction auxiliaire μ et, par suite, de l'intégrale quadratique est donc l'identité des deux expressions (5) et (6). On est ainsi conduit à l'équation indéterminée

$$\begin{aligned}(WU'' + V'_1U')(U-V)^2 - [2WU'^2 + A'U'' + 2U'(V_1V' + W'')](U-V)&\\ + [2V'W' + (V'W)' + A''']U' + 4AU'^2 = 0.&\end{aligned} \tag{7}$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de traiter. Il y figure quatre fonctions

inconnues de v, savoir A, V, W et V_1 et une seule fonction U de u. Comme cette fonction ne peut se réduire à une constante, nous la prendrons pour nouvelle variable et nous poserons

$$U' = U_1, \qquad U'' = \frac{dU'}{du} = U_1 U'_1,$$

l'accent désignant maintenant la dérivée de U_1 par rapport à U. On peut supprimer le facteur U_1 commun à tous les termes, et faire pour abréger

$$(8) \qquad V_2 = 2V'W' + (V'W)' + A''', \qquad V_3 = 2(V_1 V' + W'').$$

Enfin, effectuons et groupons les termes de manière que chacun d'eux soit le produit d'une fonction de v par une fonction de u; nous arrivons à cette nouvelle forme de l'équation proposée

$$(9) \quad \begin{aligned} W(U^2U'_1 - 2UU_1) - (2VW + A')UU'_1 + (VW + A')VU'_1 + 2(VW + 2A')U_1 \\ + V'_1 U^2 - (2VV'_1 + V_3)U + (V^2V'_1 + VV_3 + V_2) = 0. \end{aligned}$$

3. Nous allons prouver que, si l'on exclut l'hypothèse V = const. qui donne les surfaces à courbure variable applicables sur les surfaces de révolution, cette équation (9) n'admet pas d'autres solutions que celles qui correspondent aux surfaces à courbure totale constante. A cet effet, cherchons la forme la plus générale de l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \frac{(U - V)^2}{U'} dv^2,$$

qui correspond à une courbure totale constante. On sait qu'avec l'élément linéaire (1) la courbure totale a pour expression

$$-\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = \frac{-U_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial U}\left(U_1 \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial U}\right), \qquad U_1 = \frac{dU}{du}.$$

Si dans cette formule nous faisons

$$\sqrt{G} = \frac{U - V}{\sqrt{U_1}},$$

nous trouvons par un calcul facile

$$-\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = U_1 \sqrt{U_1} \frac{d^2 \sqrt{U_1}}{du^2}.$$

Nous devons donc avoir, en effectuant le second membre,

$$2U_1U_1'' - U_1'^2 = \text{const.}$$

Il suffit de différentier cette relation pour trouver $U_1''' = 0$; c'est-à-dire que U_1 ou U' est un trinome du second degré en U. Les surfaces à courbure constante sont donc caractérisées par $U_1''' = 0$; la fonction V reste arbitraire.

Revenons maintenant à l'équation (9). On voit immédiatement que, quand on prend pour U_1 un trinome du second degré en U, elle se réduit à

$$LU^2 + MU + N = 0,$$

L, M, N étant trois fonctions de v. On devra donc, pour la vérifier, poser

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0,$$

ce qui fera trois équations seulement entre les quatre fonctions V, A', W et V_1. On pourra donc se donner arbitrairement la première et déterminer les trois autres. A raison des constantes que l'intégration introduit, il y aura une infinité d'intégrales quadratiques; en effet, l'élément linéaire des surfaces à courbure constante est réductible d'une infinité de manières à la forme harmonique.

4. Il nous reste à prouver que l'équation (9) n'admet aucune solution quand on suppose $V' \neq 0$ et $U_1''' \neq 0$. Pour cela, nous différentions son premier membre trois fois successivement par rapport à U, ce qui donne

$$(10)\quad \begin{aligned} &W(U^2U_1' - 2UU_1)''' \\ &\quad - (2VW + A')(UU_1')''' + V(VW + A')U_1^{\text{IV}} + 2(VW + 2A')U_1''' = 0. \end{aligned}$$

Afin de pouvoir diviser tous les termes par WU_1''', montrons que W doit être supposé différent de zéro. En effet, quand $W = 0$, l'équation (10) se réduit à

$$A'(VU_1^{\text{IV}} + U_1''' - UU_1^{\text{IV}}) = 0.$$

Donc la parenthèse est nulle, ou bien A' est nul. Pour que la parenthèse soit nulle, V n'étant pas constant, il faut supposer $U_1''' = 0$, ce qui ramène aux surfaces à courbure constante.

D'autre part, je dis que A' n'est pas nul. Car, si A' est nul en même temps que W, l'équation (2) donne $\mu'_v = 0$; la dérivée seconde μ''_{uv} est donc

nulle aussi, en sorte que l'équation (6) devient

$$V'_1(U-V)-2V'V_1=0,$$

ce qui entraîne $V'_1=0$ et, puisque V' n'est pas nul, $V_1=0$. Mais on a vu que A peut être supposé nul quand il est constant. Alors l'équation (3') donne $\mu'_u=0$. Ainsi les deux dérivées de μ sont nulles; μ se réduit à une constante, et il n'y a plus d'intégrale quadratique (Chap. I, n° 4). Donc, en résumé, W n'est pas nul.

5. Nous pouvons en conséquence diviser l'équation (10) par le produit WU_1'''. Ensuite nous égalerons à zéro la dérivée seconde de son premier membre prise par rapport à U et à v, ce qui donnera

$$(11)\qquad \left(2V+\frac{A'}{W}\right)'\frac{d}{dU}\frac{(UU_1')'''}{U_1'''}=\left(V^2+V\frac{A'}{W}\right)'\frac{d}{dU}\frac{U_1^{\text{iv}}}{U_1'''}.$$

Je vais prouver qu'on ne peut supposer nulle ni la fonction de U qui figure au second membre, ni la fonction de v qui figure au premier.

Posons en effet

$$Q=\frac{U_1^{\text{iv}}}{U_1'''},\qquad Q'=\frac{dQ}{dU}.$$

L'équation (11) deviendra

$$(11')\qquad \left(2V+\frac{A'}{W}\right)'(Q+UQ')=\left(V^2+V\frac{A'}{W}\right)'Q'.$$

Si nous supposons

$$2V+\frac{A'}{W}=\text{const.}=m,$$

elle se réduit à

$$V'(m-2V)Q'=0,$$

ce qui montre que Q est une constante.

D'autre part, en effectuant les calculs dans l'équation (10) et divisant par WU_1''', on trouve

$$(10')\qquad QU^2+4U-\left(2V+\frac{A'}{W}\right)(QU+3)+\left(V^2+V\frac{A'}{W}\right)Q+2\left(V+2\frac{A'}{W}\right)=0,$$

relation impossible, car son premier membre est un trinome du second

degré en U qui ne peut s'évanouir que si ses trois coefficients sont nuls; donc d'abord il faudrait prendre $Q = 0$; mais alors le terme en U a pour coefficient 4 et ne peut disparaître. Ainsi, on ne peut pas faire l'hypothèse

$$\left(2V + \frac{A'}{W}\right)' = 0.$$

On ne peut pas non plus supposer $Q' = 0$. Car, en vertu de l'équation (11'), cette hypothèse entraîne soit la précédente, qui vient d'être exclue, soit l'hypothèse $Q = 0$, incompatible avec l'équation (10').

6. Les deux fonctions que nous venons de considérer étant différentes de zéro, nous pouvons diviser les deux membres de l'équation (11') par leur produit, ce qui donne

$$(12)\qquad \frac{(QU)'}{Q'} = \frac{\left(V^2 + V\frac{A'}{W}\right)'}{\left(2V + \frac{A'}{W}\right)'} = \text{const.} = n.$$

De là on déduit, en intégrant et désignant par a et b deux nouvelles constantes arbitraires,

$$QU = nQ + a, \qquad V^2 + V\frac{A'}{W} = 2nV + n\frac{A'}{W} + b,$$

ou encore

$$Q = \frac{a}{U - n}, \qquad \frac{A'}{W} = -\frac{V^2 - 2nV - b}{V - n}.$$

Substituons ces valeurs de Q et de $A' : W$ dans l'équation (10'); nous trouvons

$$a\frac{U^2 + b}{U - n} + 4U + (a - 1)\frac{V^2 - 2nV - b}{V - n} - 2(a + 2)V = 0.$$

Les termes qui dépendent de U et ceux qui dépendent de V devant séparément être constants, nous poserons

$$a\frac{U^2 + b}{U - n} + 4U + c = 0, \qquad (a - 1)\frac{V^2 - 2nV - b}{V - n} - 2(a + 2)V - c = 0.$$

Chassant les dénominateurs, on aura deux trinomes, l'un en U, l'autre en V, qui devront être identiquement nuls. Annulant les coefficients de U^2

et de V^2, on arrive aux deux conditions contradictoires

$$a + 4 = 0, \qquad a + 5 = 0.$$

Ainsi, les solutions $V' = 0$ et $U_1''' = 0$ sont les seules qu'admette l'équation (9). Toutes deux ne donnent que des surfaces applicables sur des surfaces de révolution, puisque les surfaces à courbure constante sont applicables sur des surfaces de révolution. Notre théorème est donc complètement démontré.

CHAPITRE III.

LES SURFACES RÉGLÉES HARMONIQUES.

1. Les combinaisons analytiques dont nous avons donné le principe au Chapitre I s'appliquent avec succès à l'élément linéaire des surfaces réglées et conduisent, comme on va le voir, à la proposition suivante (¹) :

Théorème. — *Si l'on fait abstraction des surfaces qui ont même cône directeur que la sphère, il n'y a pas d'autres surfaces réglées harmoniques que celles qui sont applicables sur le plan, sur les surfaces de révolution ou sur les surfaces du second degré.*

Pour établir ce théorème, nous examinerons séparément les surfaces gauches qui n'ont pas de plan directeur tangent au cercle de l'infini et celles qui admettent un pareil plan directeur.

I. — Surfaces n'admettant pas de plan directeur tangent au cercle de l'infini.

2. Leur élément linéaire peut toujours être mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2, \qquad G = (u-\alpha)^2 + k^2,$$

en désignant par α et k deux fonctions de la seule variable v. La fonction k est essentiellement différente de zéro dans les surfaces gauches : c'est le paramètre de distribution. Nous supposons en outre que les deux dérivées α' et k' ne sont pas nulles à la fois; car alors on aurait des surfaces réglées applicables sur la surface de révolution qui a reçu le nom d'*alysséide*.

Nous allons déterminer α et k de manière que l'équation aux géodésiques admette une intégrale quadratique. Pour cela, il faut et il suffit (Chap. I, n° 3) qu'on puisse trouver trois fonctions, l'une μ dépendant de u et de v, les deux autres A et W dépendant seulement de v et qui vérifient les deux

(¹) [L. Raffy, *Détermination des surfaces harmoniques réglées* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 223; 1890)].

équations

$$(1)\qquad \frac{1}{G}\frac{\partial\mu}{\partial v} = W + A'\int\frac{du}{G},$$

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\mu''_u - 3A}{G} = \frac{2}{G\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left[\sqrt{G}\left(W + A'\int\frac{du}{G}\right)\right].$$

Grâce à la forme particulière de la fonction G, on peut, sans connaître α et k, effectuer la quadrature

$$\int\frac{du}{G} = \int\frac{du}{(u-\alpha)^2 + k^2} = \frac{1}{k}\text{arc tang}\frac{u-\alpha}{k}.$$

Par suite, l'équation (1) devient

$$(1')\qquad \frac{\partial\mu}{\partial v} = [(u-\alpha)^2 + k^2]\left(W + \frac{A'}{k}\text{arc tang}\frac{u-\alpha}{k}\right)$$

et donne une première expression de la dérivée μ''_{uv}

$$(3)\qquad \frac{\partial^2\mu}{\partial u\,\partial v} = A' + 2(u-\alpha)\left(W + \frac{A'}{k}\text{arc tang}\frac{u-\alpha}{k}\right).$$

D'autre part, l'équation (2) devient

$$(2')\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial\mu}{\partial u}\right)$$
$$= 3A\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{G} + 2\frac{kk' - \alpha'(u-\alpha)}{[(u-\alpha)^2 + k^2]^2}\left(W + \frac{A'}{k}\text{arc tang}\frac{u-\alpha}{k}\right)$$
$$+ \frac{2}{(u-\alpha)^2 + k^2}\left[W' + \left(\frac{A'}{k}\right)'\text{arc tang}\frac{u-\alpha}{k} - \frac{A'}{k}\frac{k'(u-\alpha) + k\alpha'}{(u-\alpha)^2 + k^2}\right],$$

en désignant par des accents les dérivées prises par rapport à v. Intégrons par rapport à u, ce qui introduit une nouvelle fonction arbitraire V de v; nous aurons, en séparant les termes de forme différente,

$$\frac{1}{G}\frac{\partial\mu}{\partial u} = V + \frac{3A}{G} + \frac{2W'}{k}\text{arc tang}\frac{u-\alpha}{k}$$
$$+ \frac{1}{k}\left(\frac{A'}{k}\right)'\left(\text{arc tang}\frac{u-\alpha}{k}\right)^2 + \left(W\alpha' + \frac{A'k'}{k}\right)\frac{1}{G}$$
$$+ 2(Wkk' - A'\alpha')\int\frac{du}{[(u-\alpha)^2 + k^2]^2}$$
$$+ 2A'k'\int\frac{\text{arc tang}\frac{u-\alpha}{k}}{[(u-\alpha)^2 + k^2]^2}du - 2A'\frac{\alpha'}{k}\int\frac{(u-\alpha)\,\text{arc tang}\frac{u-\alpha}{k}}{[(u-\alpha)^2 + k^2]^2}du.$$

Les quadratures indiquées peuvent s'effectuer et l'on trouve, tous calculs faits, après avoir multiplié par G,

$$(4)\quad \frac{\partial\mu}{\partial u} = \mathrm{V}k^2 + 3\mathrm{A} + \mathrm{W}\alpha' + \frac{5}{4}\frac{\mathrm{A}'k'}{k} + \frac{1}{k}\left(\mathrm{W}k' - \frac{3}{2}\frac{\mathrm{A}'\alpha'}{k}\right)(u-\alpha)$$
$$+\left(\mathrm{V} - \frac{\mathrm{A}'k'}{4k^3}\right)(u-\alpha)^2 + \frac{\mathrm{A}'\alpha'}{k}\operatorname{arc\,tang}\frac{u-\alpha}{k}$$
$$+\frac{\mathrm{A}'k'}{k^2}(u-\alpha)\operatorname{arc\,tang}\frac{u-\alpha}{k} + \mathrm{N}[(u-\alpha)^2+k^2]\operatorname{arc\,tang}\frac{u-\alpha}{k}$$
$$+\mathrm{M}[(u-\alpha)^2+k^2]\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{u-\alpha}{k}\right)^2,$$

en posant pour abréger

$$\mathrm{N} = \frac{2\mathrm{W}'}{k} + \frac{2\mathrm{W}kk' - 3\mathrm{A}'\alpha'}{2k^3}, \qquad \mathrm{M} = \frac{2\mathrm{A}''k - \mathrm{A}'k'}{2k^3}.$$

3. Il faut maintenant identifier la dérivée de μ'_u prise par rapport à v avec l'expression (3).

A cet effet, remarquons que la dérivée prise par rapport à v du second membre de l'équation (4) contient le terme

$$\frac{\mathrm{A}'}{k}\,\frac{2\alpha'k'(u-\alpha) + k(\alpha'^2 - k'^2)}{(u-\alpha)^2+k^2},$$

qui n'a pas d'analogue dans la formule (3). Il faut donc que l'on ait, quel que soit u,

$$\mathrm{A}'[2\alpha'k'(u-\alpha) + k(\alpha'^2 - k'^2)] = 0.$$

Or, pour que la fonction linéaire de u qui multiplie A′ fût identiquement nulle, il faudrait

$$\alpha' = k' = 0,$$

hypothèse exclue. Il reste donc $\mathrm{A}' = 0$, c'est-à-dire que A est une constante. L'équation (3) se réduit alors à

$$(3')\qquad \frac{\partial^2\mu}{\partial u\,\partial v} = 2\mathrm{W}(u-\alpha).$$

Mais on a vu (Chap. I, n° 4) que, quand la fonction A est constante, on peut la supposer nulle. Dans la relation (4), faisons donc $\mathrm{A} = 0$; il reste

$$(4')\qquad \frac{\partial\mu}{\partial u} = \mathrm{V}k^2 + \mathrm{W}\alpha' + \frac{\mathrm{W}k'}{k}(u-\alpha) + \mathrm{V}(u-\alpha)^2$$
$$+\frac{2\mathrm{W}'k + \mathrm{W}k'}{k^2}[(u-\alpha)^2 + k^2]\operatorname{arc\,tang}\frac{u-\alpha}{k}.$$

La différentiation par rapport à v donne, entre autres, un terme en arc tang $\frac{u-\alpha}{k}$, qui a pour coefficient

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{2W'k+Wk'}{k^2}[(u-\alpha)^2+k^2]\right\},$$

et qui doit disparaître, puisqu'il n'existe pas dans la formule (3′). En conséquence, l'expression

$$\frac{2W'k+Wk'}{k^2}(u^2-2\alpha u+\alpha^2+k^2)$$

doit être une fonction de u seulement, ce qui ne peut avoir lieu, en dehors de l'hypothèse exclue $\alpha'=k'=0$, que si l'on suppose

$$2W'k+Wk'=0.$$

On tire de là, en désignant par h une constante arbitraire,

$$W=\frac{h}{\sqrt{k}}. \tag{5}$$

L'équation (4′) se simplifie encore

$$\frac{\partial\mu}{\partial u}=Vk^2+\frac{h\alpha'}{\sqrt{k}}+\frac{hk'}{k\sqrt{k}}(u-\alpha)+V(u-\alpha)^2. \tag{4''}$$

On voit que V doit être une constante pour que la dérivée μ''_{uv} ne contienne pas de terme en $(u-\alpha)^2$. Effectuons maintenant la différentiation par rapport à v du second membre de l'équation (4″); le résultat doit être, en vertu des relations (3′) et (5), identique à $2h(u-\alpha):\sqrt{k}$. On doit donc avoir identiquement

$$\frac{2h(u-\alpha)}{\sqrt{k}}=\left(Vk^2+\frac{h\alpha'}{\sqrt{k}}\right)'+\left[h\left(\frac{k'}{k\sqrt{k}}\right)'-2V\alpha'\right](u-\alpha)-h\frac{\alpha'k}{k\sqrt{k}},$$

d'où résultent les deux équations

$$\left(Vk^2+h\frac{\alpha'}{\sqrt{k}}\right)'-h\frac{\alpha'k'}{k\sqrt{k}}=0, \tag{6}$$

$$\frac{h}{2}\left(\frac{k'}{k\sqrt{k}}\right)'-V\alpha'-\frac{h}{\sqrt{k}}=0. \tag{7}$$

Il faut, puisque α' est multiplié par V dans la seconde, distinguer deux cas, suivant que V est différent de zéro ou égal à zéro.

4. *Premier cas.* — Supposons d'abord la constante V différente de zéro. De l'équation (7) on tire

$$\alpha' = \frac{h}{2V}\left[\left(\frac{k'}{k\sqrt{k}}\right)' - \frac{2}{\sqrt{k}}\right], \tag{8}$$

et, substituant dans la précédente, on trouve

$$\frac{d}{dv}\left\{V k^2 + \frac{h^2}{2V\sqrt{k}}\left[\left(\frac{k'}{k\sqrt{k}}\right)' - \frac{2}{\sqrt{k}}\right]\right\} - \frac{h^2}{2V}\,\frac{k'}{k\sqrt{k}}\left[\left(\frac{k'}{k\sqrt{k}}\right)' - \frac{2}{\sqrt{k}}\right] = 0. \tag{9}$$

Telle est l'équation du troisième ordre qui détermine le paramètre de distribution k.

Nous allons l'intégrer. Remarquons, au préalable, que la constante h n'est pas nulle. Car si elle l'était, les équations (6) et (7) entraîneraient $\alpha' = k' = 0$, contrairement à nos hypothèses. Nous pouvons donc désigner par $gh^2 : 2V$ la constante qui s'introduit quand on intègre les trois termes de l'équation (9). Il vient alors

$$V k^2 + \frac{h^2}{2V\sqrt{k}}\left[\left(\frac{k'}{k\sqrt{k}}\right)' - \frac{2}{\sqrt{k}}\right] - \frac{h^2}{2V}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{k'}{k\sqrt{k}}\right)^2 + \frac{2}{k} + g\right] = 0, \tag{10}$$

ce qui est une équation du second ordre. Pour la simplifier, nous poserons

$$\rho = \frac{1}{k}, \qquad \frac{2V^2}{h^2} = n,$$

ce qui donne, après quelques réductions,

$$\frac{n}{\rho^2} - \rho'' - 4\rho - g = 0. \tag{10'}$$

Multiplions par la dérivée ρ' et intégrons; soit m la constante arbitraire; nous aurons

$$-4\rho^3 - 2g\rho^2 + m\rho - 2n = \rho\rho'^2 = \rho\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2,$$

d'où l'on déduit

$$dv = \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{-4\rho^4 - 2g\rho^3 + m\rho^2 - 2n\rho}}. \tag{11}$$

Telle est la quadrature elliptique dont dépendent ρ et, par suite, son inverse k.

Quant à la fonction α, on peut aussi l'exprimer en fonction de ρ en intégrant l'équation (8). On trouve ainsi

$$(12) \qquad \sqrt{2n}\,\alpha = -\frac{\sqrt{-4\rho^3 - 2g\rho^2 + m\rho - 2n}}{\rho} - 2\int \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{-4\rho^3 - 2g\rho^2 + m\rho - 2n}}.$$

On connaît donc les deux fonctions cherchées α et k de la variable v. Si l'on se rappelle que l'angle ω sous lequel la ligne de striction coupe les génératrices d'une surface réglée est donné par la formule

$$k \cot\omega = \alpha' = \frac{d\alpha}{dv},$$

on voit que la relation (8) donne

$$\frac{1}{\rho}\cot\omega = -\frac{h}{V}\left(\sqrt{\rho} + \frac{d^2\sqrt{\rho}}{dv^2}\right).$$

L'équation (11) permet de calculer explicitement le second membre; on trouve ainsi, en remplaçant ρ en fonction de k,

$$(13) \qquad \cot\omega = \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{2n}}(m - 4nk).$$

Cette formule nous servira bientôt, ainsi que la formule (11), à établir que les surfaces réglées qui viennent d'être trouvées sont applicables sur l'hyperboloïde.

5. *Second cas.* — Nous supposons maintenant $V = 0$. Si l'on fait, en outre, $h = 0$, il est clair qu'on vérifie les équations (6) et (7); mais alors les formules (3′) et (4″) donnent

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} = \frac{\partial\mu}{\partial v} = 0,$$

et nous avons vu (Chap. I, nº 4) que, quand A et μ se réduisent à des constantes, l'intégrale quadratique disparaît. Il faut donc supposer $h \neq 0$, et, supprimant ce facteur, on a

$$(6') \qquad \left(\frac{\alpha'}{\sqrt{k}}\right)' - \frac{k'}{k}\frac{\alpha'}{\sqrt{k}} = 0,$$

$$(7') \qquad -\frac{1}{2}\left(\frac{k'}{k\sqrt{k}}\right)' + \frac{1}{\sqrt{k}} = 0.$$

La seconde de ces équations n'est autre que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)'' + \frac{1}{\sqrt{k}} = 0.$$

On peut, sans restreindre la généralité, prendre pour son intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \beta \sin v,$$

au lieu de $\beta \sin(v - v_0)$, en désignant par β une constante arbitraire. On a donc

(14) $$k = \frac{1}{\beta^2 \sin^2 v}.$$

D'autre part, l'équation (6′) donne, avec une nouvelle constante γ,

(15) $$\frac{\alpha'}{\sqrt{k}} = \gamma k, \qquad \alpha' = \gamma k \sqrt{k},$$

d'où, en ayant égard à la formule (14),

$$\alpha = \gamma \int k\sqrt{k}\, dv = \frac{\gamma}{\beta^3} \int \frac{dv}{\sin^3 v} = \frac{\gamma}{2\beta^3}\left(\log \operatorname{tang} \frac{v}{2} - \frac{\cos v}{\sin^2 v}\right) + \text{const.}$$

Ainsi se trouvent complètement déterminées les deux fonctions α et k dans l'hypothèse $V = 0$. Il suit de la relation (15) et de la formule rappelée plus haut que la ligne de striction coupe les génératrices sous un angle ω tel que

(16) $$\cot \omega = \gamma \sqrt{k} = \frac{\gamma}{\beta \sin v}.$$

6. Pour être en droit d'affirmer que les éléments linéaires trouvés dans les deux cas $V \neq 0$ et $V = 0$ conviennent bien à des surfaces harmoniques, il faudrait calculer les coefficients de l'intégrale quadratique et discuter les deux cas d'exception prévus par la règle posée au début de ce travail. Mais nous allons montrer directement que ces deux éléments linéaires appartiennent à des quadriques, ce qui lèvera toute difficulté.

Commençons par le dernier, celui que déterminent les formules (14) et (15). Je dis qu'il existe un paraboloïde admettant cet élément linéaire. En effet, si dans la formule

$$ds^2 = du^2 + [(u - \alpha)^2 + k^2]\, dv^2$$

on introduit la variable

$$l = u - \alpha,$$

qui représente la distance du point (u, v) au point central, il vient

(17) $$ds^2 = (dl + d\alpha)^2 + (l^2 + k^2)\,dv^2 = dl^2 + 2\alpha'\,dl\,dv + (l^2 + k^2 + \alpha'^2)\,dv^2.$$

Dans le cas présent nous avons

$$k = \frac{1}{\beta^2 \sin^2 v}, \qquad \alpha' = \frac{\gamma}{\beta^3 \sin^3 v};$$

de sorte que notre élément linéaire peut s'écrire

(18) $$ds^2 = dl^2 + \frac{2\gamma}{\beta^3}\frac{dl\,dv}{\sin^3 v} + \left(l^2 + \frac{1}{\beta^4 \sin^4 v} + \frac{\gamma^2}{\beta^6 \sin^6 v}\right) dv^2.$$

Or, si l'on considère la surface dont les coordonnées rectangulaires ont pour expressions

$$x = l\cos v - \frac{\gamma}{2\beta^3 \sin^2 v},$$

$$y = l\sin v - \frac{\gamma}{\beta^3}\cot v,$$

$$z = \frac{1}{\beta^2}\cot v,$$

on trouve aisément que son élément linéaire est représenté par la formule (18). D'autre part, l'élimination des deux paramètres l et v se fait immédiatement et donne

$$\beta z\left(\beta y - \frac{\gamma}{2}z + \gamma\right) - x - \frac{\gamma}{2\beta^3} = 0,$$

ce qui est l'équation d'un paraboloïde. Par là il est démontré tout à la fois que l'élément linéaire obtenu dans l'hypothèse $V = 0$ est harmonique et qu'il ne convient qu'à des surfaces applicables sur des paraboloïdes. Cet élément linéaire est le suivant

$$ds^2 = du^2 + [(u - \alpha)^2 + k^2]\,dv^2,$$

$$k = \frac{1}{\beta^2 \sin^2 v}, \qquad \alpha = \frac{\gamma}{2\beta^3}\left(\log\operatorname{tang}\frac{v}{2} - \frac{\cos v}{\sin^2 v}\right).$$

7. Revenons maintenant à l'élément linéaire trouvé en premier lieu,

dans l'hypothèse $V \neq 0$, et que nous mettons sous la forme

$$ds^2 = dl^2 + 2\alpha'\, dl\, dv + (l^2 + k^2 + \alpha'^2)\, dv^2,$$

en posant, conformément aux équations (13) et (11),

$$(19) \qquad 4\sqrt{\frac{n}{2}}\,\alpha' = \frac{m - 4nk}{\sqrt{k}},$$

$$(20) \qquad \left(\frac{dk}{dv}\right)^2 = k^2(-4 - 2gk + mk^2 - 2nk^3).$$

Nous allons prouver que, quelles que soient les constantes g, m et n, on peut toujours trouver un hyperboloïde admettant cet élément linéaire. A cet effet, nous donnerons, mais sans les démontrer, certaines formules dont on ne saurait se passer quand on veut étudier l'hyperboloïde au point de vue de la théorie des surfaces réglées.

Soit, en coordonnées rectangulaires, l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

On peut évidemment poser

$$x = \frac{au}{r}\cos\varphi - a\sin\varphi, \qquad y = \frac{bu}{r}\sin\varphi + b\cos\varphi, \qquad z = \frac{cu}{r},$$

en faisant, pour abréger,

$$r = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + c^2}.$$

Avec ces notations, on trouve, pour le paramètre de distribution,

$$k = -\frac{abcr^2}{P}, \qquad P = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + c^4 - c^2r^2,$$

et pour l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 - 2\frac{r^2 - c^2}{r}\,du\,d\varphi + \left(\frac{Pu^2}{r^4} + 2c^2\frac{a^2 - b^2}{r^3}\,u\sin\varphi\cos\varphi + r^2 - c^2\right)d\varphi^2.$$

On en conclut que la valeur de u, qui correspond au point central, est

$$\alpha = -\frac{c^2(a^2 - b^2)}{P}\,r\sin\varphi\cos\varphi,$$

et, si l'on introduit la distance $l = u - \alpha$ comptée à partir de ce point, l'élément linéaire devient

$$ds^2 = \left\{dl - \left[\frac{r^2 - c^2}{r} + c^2(a^2 - b^2)\left(\frac{r\sin\varphi\cos\varphi}{P}\right)'\right] d\varphi\right\}^2 + \frac{P}{r^4}(l^2 + k^2)\, d\varphi^2,$$

l'accent désignant une dérivée prise par rapport à φ. Or, si l'on compare avec la formule générale

$$ds^2 = (dl + d\alpha)^2 + (l^2 + k^2)\, dv^2,$$

on obtient les deux relations

$$d\varphi = \frac{r^2 dv}{\sqrt{P}},$$

$$d\alpha = -\left[\frac{r^2 - c^2}{r} + c^2(a^2 - b^2)\left(\frac{r\sin\varphi\cos\varphi}{P}\right)'\right] d\varphi,$$

d'où l'on déduit

$$\left(\frac{dk}{dv}\right)^2 = \frac{r^4}{P}\left(\frac{dk}{d\varphi}\right)^2,$$

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dv} = -\frac{r^2}{\sqrt{P}}\left[\frac{r^2 - c^2}{r} + c^2(a^2 - b^2)\left(\frac{r\sin\varphi\cos\varphi}{P}\right)'\right].$$

8. Pour former la première de ces équations, il suffit de différentier par rapport à φ l'expression donnée plus haut

$$k = \frac{-abc\,r^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 + c^4 - c^2 r^2},$$

et de réintroduire partout k à la place de φ. On trouve ainsi

$$(20') \qquad \left(\frac{dk}{dv}\right)^2 = \frac{4k^2}{a^2 b^2 c^2}(ak + bc)(bk + ac)(ck - ab).$$

De même, en effectuant les calculs dont dépend l'expression explicite de α' et tenant compte de la valeur de k, on élimine φ et l'on trouve

$$(19') \qquad \alpha' = -\frac{1}{\sqrt{-abck}}\left(2k - \frac{a^2 b^2 - b^2 c^2 - c^2 a^2}{abc}\right).$$

Pour établir la proposition annoncée, il n'y a plus qu'à montrer qu'on peut identifier à la fois les formules (20) et (20′) d'une part, ainsi que les

formules (19) et (19′) d'autre part. La comparaison des deux premières donne

$$-a^2b^2c^2 = -\frac{n^2}{4}, \qquad a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 = -\frac{m}{2n^2}, \qquad a^2 + b^2 - c^2 = \frac{4g}{n},$$

et l'on vérifie aisément que ces trois relations entraînent l'identité des formules (19) et (19′). En conséquence, on voit que l'élément linéaire obtenu dans l'hypothèse $V \neq 0$ convient à l'hyperboloïde dont les demi-axes sont a, b, c quand on prend pour a^2, b^2 et $-c^2$ les racines de l'équation

$$t^3 - \frac{4g}{n}t^2 - \frac{m}{2n^2}t + \frac{n^2}{4} = 0.$$

Notre théorème est donc démontré en ce qui concerne les surfaces réglées sans plan directeur tangent au cercle de l'infini.

II. — Surfaces admettant un plan directeur tangent au cercle de l'infini.

9. Leur élément linéaire peut toujours être mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + (pu + q)\,dv^2,$$

où p et q désignent deux fonctions de la seule variable v. Or la fonction p n'est pas nulle, sans quoi la surface serait développable. Nous pouvons donc faire $p = 1$. Enfin posons $q = -\alpha$ et remarquons que la dérivée α' n'est pas nulle; car si α était une constante, on aurait l'élément linéaire d'une surface de révolution. Soit donc désormais

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2, \qquad G = u - \alpha, \qquad (\alpha' \neq 0).$$

Nous aurons, en conservant toujours les mêmes notations,

$$(1) \qquad \frac{1}{G}\frac{\partial\mu}{\partial v} = W + A'\int\frac{du}{G},$$

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\mu'_u - 3A}{G} = \frac{2}{G\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left[\sqrt{G}\left(W + A'\int\frac{du}{G}\right)\right].$$

Or l'intégration donne

$$\int\frac{du}{G} = \int\frac{du}{u-\alpha} = \log(u - \alpha),$$

en sorte qu'il vient d'après l'équation (1)

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} = (u-\alpha)[\mathrm{W} + \mathrm{A}' \log(u-\alpha)].$$

On déduit de là une première expression de μ''_{uv}

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{A}'\log(u-\alpha) + \mathrm{A}' + \mathrm{W}.$$

Calculons maintenant le second membre de l'équation (2); il vient

$$\begin{aligned}&\frac{2}{(u-\alpha)\sqrt{u-\alpha}}\frac{\partial}{\partial u}\left\{\sqrt{u-\alpha}\,[\mathrm{W}+\mathrm{A}'\log(u-\alpha)]\right\}\\ &\quad = \frac{2\mathrm{W}'}{u-\alpha} - \frac{(\mathrm{W}+2\mathrm{A}')\alpha'}{(u-\alpha)^2} + 2\mathrm{A}''\frac{\log(u-\alpha)}{u-\alpha} - \mathrm{A}'\alpha'\frac{\log(u-\alpha)}{(u-\alpha)^2}.\end{aligned}$$

Multiplions chaque terme par du et intégrons en faisant usage de la formule

$$\int \frac{\log t}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}(\log t + 1);$$

soit V la fonction de v qui s'introduit comme constante arbitraire. L'équation (2) ainsi intégrée nous donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mu}{\partial u} &= 3\mathrm{A} + \mathrm{V}(u-\alpha) + (\mathrm{W}+3\mathrm{A}')\alpha'\\ &\quad + \mathrm{A}'\alpha'\log(u-\alpha) + 2\mathrm{W}'(u-\alpha)\log(u-\alpha) + \mathrm{A}''(u-\alpha)[\log(u-\alpha)]^2.\end{aligned}$$

10. Si nous différentions par rapport à v, nous trouverons entre autres le terme $-\mathrm{A}'\alpha'^2 : (u-\alpha)$ qui n'a pas d'analogue dans l'expression précédemment trouvée pour μ''_{uv}. En conséquence, comme α' est supposé différent de zéro, la dérivée A′ doit être nulle, c'est-à-dire que A est une constante.

Cette constante peut être supposée nulle (Chap. I, n° 4, *Rem. I*). Alors la valeur de μ'_u se simplifie

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} = \mathrm{V}(u-\alpha) + \mathrm{W}\alpha' + 2\mathrm{W}'(u-\alpha)\log(u-\alpha),$$

ainsi que celle de μ''_{uv}, qui se réduit à W. Comme elle ne contient pas de terme logarithmique, il faut égaler à zéro le coefficient du terme en $\log(u-\alpha)$, trouvé en différentiant μ'_u par rapport à v. On a donc, *quel*

que soit u,

$$\frac{\partial}{\partial v}[W'(u-\alpha)]=0,$$

c'est-à dire que le binôme $W'u - W'\alpha$ ne dépend pas de v. Comme α ne peut pas être supposé constant, on conclut de là que W' est nul. Donc W est une constante. Il vient alors, en comparant les deux expressions de μ''_{uv}, l'identité

$$W\alpha''-V\alpha'+V'(u-\alpha)=W;$$

d'où l'on déduit

$$V=\text{const.},\qquad W\alpha''-V\alpha'=W.$$

La constante W ne peut être nulle, sans quoi V serait nulle aussi; les deux dérivées μ'_u et μ'_v s'évanouiraient; l'intégrale quadratique disparaîtrait (Chap. I, n° 4, *Rem.* II).

11. Par contre, la constante V peut être nulle. D'où deux cas à distinguer.

Supposons d'abord $V\neq 0$ et soit $V=W:a$. Nous avons, pour déterminer α, l'équation

$$\alpha''-\frac{\alpha'}{a}=1,$$

qui donne, en désignant par v_0 et b deux constantes arbitraires,

$$\alpha=-a(v-v_0)-a^2+be^{\frac{v}{a}}.$$

On aura donc, en faisant rentrer dans u la constante $a(v_0+a)$, cet élément linéaire

$$ds^2=du^2+\left(u+av-be^{\frac{v}{a}}\right)dv^2. \tag{21}$$

Remarquons que la constante b n'est pas nulle, sans quoi nous aurions l'élément linéaire d'un paraboloïde de révolution. Nous pouvons donc faire le changement de variables

$$u+av-a^2=a(\rho+\rho_1),\qquad u+av-be^{\frac{v}{a}}=-\rho\rho_1,$$

qui serait impossible si b était nul. Effectuant les calculs, on trouve aisément

$$ds^2=(\rho-\rho_1)\left[\frac{\rho\,d\rho^2}{(\rho+a)^2}-\frac{\rho_1\,d\rho_1^2}{(\rho_1+a)^2}\right], \tag{21'}$$

ce qui est une forme dégénérée de l'élément linéaire des quadriques rapportées à leurs lignes de courbure.

Supposons maintenant $V = 0$: il vient $\alpha'' = 1$, ce qui permet, sans restreindre la généralité, de prendre $2\alpha = v^2$, de sorte que l'élément linéaire est, dans ce cas particulier,

$$ds^2 = du^2 - \left(u - \frac{v^2}{2}\right) dv^2. \tag{22}$$

Il suffit de faire le changement de variables

$$v = \rho - \rho_1, \qquad \frac{v^2}{2} - u = \rho\rho_1$$

pour trouver par un calcul facile

$$ds^2 = (\rho - \rho_1)(\rho\, d\rho^2 - \rho_1\, d\rho_1^2), \tag{22'}$$

ce qui est encore une forme dégénérée de l'élément linéaire des quadriques. Notre théorème est donc entièrement démontré. Des quatre formes que nous avons trouvées pour l'élément linéaire des surfaces réglées harmoniques, la première convient toujours à un hyperboloïde, les trois dernières appartiennent toujours à des paraboloïdes ; mais, pour les éléments linéaires (21) et (22), le paraboloïde ne peut être réel, puisqu'il admet un plan directeur, et un seul, tangent au cercle de l'infini.

Remarque. — L'analyse par laquelle nous avons obtenu tous les éléments linéaires des surfaces réglées harmoniques montre que l'intégrale quadratique de l'équation aux géodésiques est, pour ces surfaces, unique et parfaitement déterminée. Il suit de là que ces éléments linéaires ne sont réductibles *que d'une seule manière* à la forme harmonique. Nous avons donc démontré que *toutes les quadriques sont simplement harmoniques*, abstraction faite bien entendu de la sphère, que nous avons écartée dès le début.

CHAPITRE IV.

LES CERCLES GÉODÉSIQUES ET LES SURFACES HARMONIQUES.

1. Les surfaces applicables sur les surfaces de révolution sont les seules, à ma connaissance du moins, dont on ait déterminé complètement les cercles géodésiques. M. Darboux ([1]), après avoir étendu aux cercles géodésiques la méthode de recherche des lignes géodésiques qui procède du théorème de Jacobi, a déterminé par deux quadratures les cercles géodésiques des surfaces de révolution. Nous nous proposons d'étudier ici les intégrales linéaires et quadratiques de l'équation aux cercles géodésiques. A cet effet, nous rappellerons la règle posée par M. Darboux.

Pour chercher sur les surfaces d'élément linéaire

$$ds^2 = 4\lambda\, dx\, dy$$

les courbes dont la courbure géodésique est donnée et égale à k, *on détermine deux fonctions* M *et* N, *assujetties à l'unique condition*

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 2ik\lambda$$

et l'on forme l'équation aux dérivées partielles

$$\nabla \equiv \frac{(p+M)(q+N)}{\lambda} = 1, \qquad p = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Si l'on en peut trouver une intégrale θ *qui dépende, ainsi que l'une au moins de ses dérivées* p *et* q, *d'une constante arbitraire* a, *l'équation finie des courbes cherchées s'obtient en égalant à une nouvelle constante arbitraire la dérivée de* θ *par rapport à* a.

On est donc conduit à chercher s'il existe des intégrales

$$I(p, q, x, y) = \text{const.}$$

([1]) *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III; Livre IV, Chap. VII.

compatibles avec $\nabla = 1$, c'est-à-dire telles que le crochet

$$[\nabla, I] = \frac{\partial\nabla}{\partial x}\frac{\partial I}{\partial p} - \frac{\partial\nabla}{\partial y}\frac{\partial I}{dq} + \frac{\partial\nabla}{\partial p}\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{\partial\nabla}{\partial q}\frac{\partial I}{\partial y}$$

soit nul en vertu de la seule hypothèse $\nabla - 1 = 0$. C'est faire, pour les cercles géodésiques, ce que M. Massieu a fait pour les lignes géodésiques. Mais ici l'expression ∇ n'étant pas homogène en p et q, on ne peut plus, comme dans le problème de M. Massieu, supposer homogènes les intégrales I, ce qui simplifiait considérablement les calculs.

I. — Intégrales linéaires.

2. Du résultat obtenu par M. Darboux on déduit aisément que, pour les surfaces applicables sur les surfaces de révolution, l'équation aux cercles géodésiques

$$\nabla \equiv \frac{(p+M)(q+N)}{\lambda} = 1$$

admet l'intégrale linéaire

$$I = p - q = \text{const.}$$

Nous allons voir que la réciproque de cette proposition est vraie. Supposons, en effet, que l'équation aux cercles géodésiques admette une intégrale linéaire

$$I = Ap + Bq + C = \text{const.},$$

où A, B et C sont des fonctions encore inconnues de x et y. Écrivons que le crochet $[\nabla, I]$ est nul en vertu de $\nabla - 1 = 0$. Comme c'est une fonction quadratique de p et de q, on devra avoir, quels que soient p et q,

$$[\nabla, I] = \rho(\nabla - 1),$$

en désignant par ρ une fonction convenablement choisie de x et y. Le calcul effectué conduit à l'identité

$$\begin{aligned}&\left[A\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_x + B\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_y\right](p+M)(q+N)\\&\quad+\frac{AM'_x + BM'_y}{\lambda}(q+N) + \frac{AN'_x + BN'_y}{\lambda}(p+M)\\&\quad-\frac{q+N}{\lambda}(A'_x p + B'_x q + C'_x) - \frac{p+M}{\lambda}(A'_y p + B'_y q + C'_y) = \rho\left[\frac{(p+M)(q+N)}{\lambda} - 1\right].\end{aligned}$$

On voit que le premier membre ne doit contenir ni terme en p^2 ni terme en q^2. Donc on a

$$B'_x = 0, \qquad A'_y = 0.$$

D'après cela, on peut, sans restreindre la généralité, prendre

$$B = 1, \qquad A = 1.$$

On n'exclut ainsi que l'hypothèse où l'une des fonctions A et B serait nulle. Or, en supposant, par exemple, $B = 0$ avec $A = 1$, on est conduit aux relations d'identification

$$\rho = -\frac{\lambda'_x}{\lambda}, \qquad M'_x = C'_x, \qquad N'_x = C'_y, \qquad (MN)'_x - (NC'_x + MC'_y) = \lambda'_x,$$

d'où l'on conclut $\lambda'_x = 0$. Les surfaces correspondantes sont développables.

Soit donc désormais $A = B = 1$. La comparaison des termes en pq dans les deux membres donne

$$(1) \qquad \rho = -\frac{\lambda'_x + \lambda'_y}{\lambda},$$

et l'identité à vérifier se réduit à

$$(2) \quad (M'_x + M'_y - C'_x)q + (N'_x + N'_y - C'_x)p + (MN)'_x + (MN)'_y - (NC'_x + MC'_y) = \lambda'_x + \lambda'_y;$$

d'où les trois relations

$$(3) \quad C'_x = M'_x + M'_y, \qquad C'_y = N'_x + N'_y, \qquad \lambda'_x + \lambda'_y = (MN)'_x + (MN)'_y - (NC'_x + MC'_y).$$

Or, en vertu des deux premières, la dernière devient $\lambda'_x + \lambda'_y = 0$. Il en résulte que λ est une fonction de $x - y$ seulement; d'où la conclusion annoncée :

Les seules surfaces pour lesquelles l'équation aux cercles géodésiques admette une intégrale linéaire sont les surfaces applicables sur les surfaces de révolution.

M. Massieu a démontré la même propriété relativement aux *lignes* géodésiques. On voit que son théorème peut être généralisé et étendu aux *cercles* géodésiques.

3. Pour compléter la solution de notre problème, nous avons à écrire la condition

$$\frac{\partial C'_x}{\partial y} = \frac{\partial C'_y}{\partial x},$$

qui nous donne cette relation entre M et N

$$(4)\qquad N''_{x^2} - M''_{xy} = -(N''_{xy} - M''_{y^2}).$$

Rappelons-nous, d'autre part, que M et N vérifient aussi l'équation

$$(5)\qquad N'_x - M'_y = 2ik\lambda \qquad (k = \text{const.}).$$

Mais, λ étant une fonction de $x - y$, les deux dérivées λ'_x et λ'_y sont égales et de signes contraires, ce qui entraîne l'équation (4). La relation (5) est donc la seule qui régisse les fonctions M et N. Donc il y a une infinité de manières d'écrire l'équation aux cercles géodésiques, à chacune desquelles correspond une intégrale linéaire. Il va sans dire que, dans tous les cas, on trouve la même équation finie pour ces courbes. En vue de l'obtenir, posons

$$\lambda = f'(x-y), \qquad N'_x = ik\,f'(x-y) + \mu''_{yx}, \qquad M'_y = -ik\,f'(x-y) + \mu''_{xy},$$

de manière à vérifier l'équation (5), quelle que soit la fonction arbitraire μ''_{xy}. De là nous déduisons

$$\begin{aligned} N &= \quad ik\ f(x-y) + \mu'_y, & M &= ik\ f(x-y) + \mu'_x, \\ N'_y &= -ik\,f'(x-y) + \mu''_{y^2}, & M'_x &= ik\,f'(x-y) + \mu''_{x^2}. \end{aligned}$$

Portons les valeurs de M'_x, M'_y, N'_x, N'_y dans les deux premières équations (3). Il vient

$$C'_x = M'_x + M'_y = \mu''_{x^2} + \mu''_{xy}, \qquad C'_y = N'_x + N'_y = \mu''_{xy} + \mu''_{y^2},$$

d'où, en intégrant,

$$C = \mu'_x + \mu'_y.$$

L'intégrale linéaire est donc entièrement déterminée

$$I = p + q + \mu'_x + \mu'_y = \text{const.} = 2a.$$

Rapprochons-en l'équation $\nabla = 1$. Nous obtenons le système

$$\begin{aligned} (p + ikf + \mu'_x)(q + ikf + \mu'_y) &= f', \\ (p + ikf + \mu'_x)(q + ikf + \mu'_y) &= 2a + 2kif, \end{aligned}$$

dont la résolution donne

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = p = a - \mu'_x + \sqrt{(a + ikf)^2 - f'},$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = q = a - \mu'_y - \sqrt{(a + ikf)^2 - f'}.$$

En conséquence, la fonction θ est déterminée par une seule quadrature

$$\theta = a(x + y) - \mu + \int \sqrt{[a + ikf(x - y)]^2 - f'(x - y)}\, d(x - y),$$

et l'équation finie des cercles géodésiques est la suivante :

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} \equiv x + y + \int \frac{[a + ikf(x - y)]\, d(x - y)}{\sqrt{[a + ikf(x - y)]^2 - f'(x - y)}} = \text{const.}$$

La fonction λ ayant été donnée sous la forme $f'(x - y)$, la solution du problème dépend bien de deux quadratures, conformément au résultat de M. Darboux.

II. — Intégrales quadratiques.

4. Nous allons rechercher maintenant dans quels cas l'équation aux cercles géodésiques

$$\nabla \equiv \frac{(p + M)(q + N)}{\lambda} = 1$$

admet une intégrale quadratique

$$I \equiv Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + 2ap + 2bq + 2c = \text{const.}$$

On sait que l'équation aux *lignes* géodésiques

$$\frac{pq}{\lambda} = 1$$

admet une intégrale quadratique

$$Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = \text{const.}$$

dans deux cas et deux seulement : 1° quand l'élément linéaire $\lambda\, dx\, dy$ est de la forme

$$ds^2 = [x + \eta(y)]\, dx\, dy,$$

la fonction $\eta(y)$ étant arbitraire, auquel cas il ne convient généralement qu'à des surfaces imaginaires; 2° quand l'élément linéaire $\lambda\,dx\,dy$ est de la forme

$$ds^2 = [\varphi(x+y) - f(x-y)]\,dx\,dy,$$

quelles que soient les fonctions φ et f, résultat capital dû à M. Massieu.

Dans le problème relatif aux *cercles* géodésiques, nous retrouverons les deux mêmes formes d'élément linéaire, mais plus déterminées, car elles ne dépendront que de constantes et non plus de fonctions arbitraires. En effet, l'existence d'une intégrale quadratique pour l'équation aux *cercles* géodésiques impose à l'élément linéaire des conditions plus restrictives que l'existence d'une intégrale quadratique pour l'équation aux *lignes* géodésiques, ce fait analytique étant supposé se produire pour une valeur constante *quelconque* de la courbure géodésique k, au lieu de la seule valeur $k = 0$.

Nous avons à exprimer que le crochet

$$[\nabla, \mathrm{I}] = \frac{\partial\nabla}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial p} - \frac{\partial\nabla}{\partial p}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x} + \frac{\partial\nabla}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial q} - \frac{\partial\nabla}{\partial q}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial y}$$

est nul en vertu de $\nabla - 1 = 0$, ou qu'il est identique à

$$2(\alpha p + \beta q + \gamma)[(p+\mathrm{M})(q+\mathrm{N}) - \lambda],$$

α, β et γ étant des fonctions convenables de x et y.

Remarquons d'abord que l'équation $\nabla = 1$ permet d'exprimer le produit pq par une fonction linéaire de p et de q, en sorte que, dans l'intégrale I, nous pouvons supposer $\mathrm{B} = 0$. Le calcul du crochet $[\nabla, \mathrm{I}]$ s'effectue aisément et nous arrivons à l'identité suivante :

$$\begin{aligned}
&2(\mathrm{A}p+a)\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_x(p+\mathrm{M})(q+\mathrm{N}) + \frac{\mathrm{M}'_x}{\lambda}(q+\mathrm{N}) + \frac{\mathrm{N}'_x}{\lambda}(p+\mathrm{M})\right] - \frac{q+\mathrm{N}}{\lambda}(\mathrm{A}'_x p^2 + \mathrm{C}'_x q^2 + 2a'_x p + 2b'_x q + 2c'_x)\\
&+2(\mathrm{C}q+b)\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_y(p+\mathrm{M})(q+\mathrm{N}) + \frac{\mathrm{M}'_y}{\lambda}(q+\mathrm{N}) + \frac{\mathrm{N}'_y}{\lambda}(p+\mathrm{M})\right] - \frac{p+\mathrm{M}}{\lambda}(\mathrm{A}'_y p^2 + \mathrm{C}'_y q^2 + 2a'_y p + 2b'_y q + 2c'_y)\\
&\equiv 2(\alpha p + \beta q + \gamma)[(p+\mathrm{M})(q+\mathrm{N}) - \lambda].
\end{aligned}$$

On voit que le premier membre ne doit contenir ni terme en p^3, ni terme en q^3; donc les dérivées A'_y et C'_x sont nulles. Ainsi A ne dépend que de x et C ne dépend que de y. Il faut distinguer deux cas, suivant que le produit AC est nul ou différent de zéro.

5. *Premier cas.* — Le produit AC est nul. Ses deux facteurs ne peuvent être nuls, ce qui réduirait l'intégrale I au premier degré. Soit donc $C = 0$. Nous supposerons aussi $A = 1$, moyennant un changement de variable qui ne porte que sur x. Alors l'identité à vérifier devient

$$\begin{aligned}(p+a)\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_x (p+M)(q+N) + \frac{M'_x}{\lambda}(q+N) + \frac{N'_x}{\lambda}(p+M)\right] - \frac{q+N}{\lambda}(a'_x p + b'_x q + c'_x)\\ + b\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_y (p+M)(q+N) + \frac{M'_y}{\lambda}(q+N) + \frac{N'_y}{\lambda}(p+M)\right] - \frac{p+M}{\lambda}(a'_y p + b'_y q + c'_y)\\ \equiv (\alpha p + \beta q + \gamma)[(p+M)(q+N) - \lambda].\end{aligned}$$

Son premier membre ne contient pas de terme en pq^2. Donc β est nul, ce qui réduit le second membre à une fonction linéaire de q. Le premier devant aussi en être une, la dérivée b'_x est nulle et b ne dépend que de y.

Soit d'abord $b = 0$. L'identification donne six équations d'où l'on tire aisément

$$\alpha = \left(\frac{1}{\lambda}\right)'_x, \qquad \gamma = M\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_x, \qquad N'_x = a'_y, \qquad M = a - \frac{\eta}{\lambda},$$

$$c = \frac{a^2}{2} - \frac{\eta^2}{2\lambda^2} + Y, \qquad c'_y = aa'_y - \lambda'_x,$$

en désignant par η et Y deux fonctions provisoirement indéterminées de y. Comparant les expressions de c et de c'_y, on trouve

$$\lambda'_x = \frac{\eta}{\lambda}\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)'_y - Y' = 2ik\eta - Y',$$

parce que l'équation $N'_x - M'_y = 2ik\lambda$ se réduit ici à $\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)'_y = 2ik\lambda$. On a donc

$$\lambda = (2ik\eta - Y')x + \varphi(y).$$

Substituant cette expression dans la relation précédente

$$\lambda\eta' - \eta\lambda'_y - 2ik\lambda^3 = 0,$$

on trouve

$$2ik\eta - Y' = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\eta}{\varphi(y)} = 2ik\varphi(y),$$

d'où l'on conclut d'abord que la surface est développable, λ'_x étant nul;

puis, calculant η et Y pour avoir c, on trouve $2c = a^2 +$ const., en sorte que l'intégrale I se réduit au carré de $p + a$; ce n'est plus qu'une intégrale linéaire.

Lorsque b n'est pas nul, nous pouvons, au moyen d'un changement de variable portant sur y, faire $b = 1$. L'identité proposée devient

$$(p+a)\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_x (p+M)(q+N) + \frac{M'_x}{\lambda}(q+N) + \frac{N'_x}{\lambda}(p+M)\right] - \frac{q+N}{\lambda}(a'_x p + c'_x)$$
$$+ \left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_y (p+M)(q+N) + \frac{M'_y}{\lambda}(q+N) + \frac{N'_y}{\lambda}(p+M)\right] - \frac{p+M}{\lambda}(a'_y p + c'_y)$$
$$\equiv (\alpha p + \gamma)[(p+M)(q+N) - \lambda].$$

Les deux membres sont linéaires par rapport à $q + N$. Identifions les coefficients de $q + N$ et les termes indépendants :

$$(p+a)\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_x (p+M) + \frac{M'_x}{\lambda}\right] - \frac{a'_x p + c'_x}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)'_y (p+M) + \frac{M'_y}{\lambda} \equiv (\alpha p + \gamma)(p+M),$$
$$\frac{1}{\lambda}[N'_x(p+a) + N'_y - a'_y p - c'_y](p+M) \equiv -\lambda(\alpha p + \gamma).$$

La seconde de ces identités donne

$$N'_x = a'_y, \qquad \alpha = -\frac{aN'_x + N'_y - c'_y}{\lambda^2}, \qquad \gamma = -\frac{(aN'_x + N'_y - c'_y)M}{\lambda^2}.$$

La première devient par suite

$$(p+a)[-\lambda'_x(p+M) + \lambda M'_x] - \lambda(a'_x p + c'_x) - \lambda'_y(p+M) + \lambda M'_y$$
$$\equiv -(aN'_x + N'_y - c'_y)(p+M)^2.$$

Ordonnant son premier membre par rapport à $p + M$, on trouve, par identification,

$$\lambda'_x = aN'_x + N'_y - c'_y, \qquad [\lambda(M-a)]'_x = \lambda'_y, \qquad (Ma)'_x - MM'_x + M'_y - c'_x = 0;$$

ce qui, à raison de $N'_x = a'_y$, peut s'écrire

$$c'_y = aa'_y + N'_y - \lambda'_x, \qquad c'_x = (Ma)'_x - MM'_x + M'_y,$$
$$\lambda'_y = [\lambda(M-a)]'_x, \qquad N'_x = a'_y.$$

6. Telles sont les quatre équations du problème. Les deux premières feront connaître c quand les autres fonctions seront déterminées; mais

elles entraînent la condition d'intégrabilité $c''_{yx} = c''_{xy}$, qui, eu égard à $N'_x = a'_y$, peut s'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{(M-a)^2}{2} - \frac{\partial^2(M-a)}{\partial y^2} = \lambda''_{x^2}.$$

Aux deux dernières équations $\lambda'_y = [\lambda(M-a)]'_x$, $N'_x = a'_y$, il faut adjoindre la relation $N'_x - M'_y = 2ik\lambda$.

L'élimination de N et de λ se fait aisément et donne

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{(M-a)^2}{2} - \frac{\partial^2(M-a)}{\partial y^2} = 0.$$

De ce résultat et de celui qui précède, on conclut que la dérivée λ''_{x^2} est nulle; c'est-à-dire que λ est une fonction linéaire de x

$$\lambda = xY' + \eta',$$

Y' et η' étant deux fonctions de y. L'élément linéaire $\lambda\,dx\,dy$ a donc bien, comme nous l'annoncions au début, la forme

$$ds^2 = (xY' + \eta')\,dx\,dy,$$

qui a été trouvée par M. S. Lie [1] pour les surfaces représentables géodésiquement sur d'autres surfaces avec conservation d'une *seule* famille de lignes de longueur nulle. Mais ici les fonctions Y' et η' ne sont pas arbitraires. Substituons en effet l'expression de λ dans les équations

$$\lambda'_y = [\lambda(M-a)]'_x, \qquad -2ik\lambda = M'_y - N'_x = M'_y - a'_y;$$

il vient

$$[\lambda(M-a)]'_x = xY'' + \eta'', \qquad (M-a)'_y = -2ik(xY' + \eta'),$$

d'où, en intégrant et désignant par η_0 et ξ deux fonctions, l'une de y, l'autre de x, on tire

$$(xY' + \eta')(M-a) = \frac{x^2}{2}Y'' + \eta''x + \eta_0, \qquad M - a = -2ikxY - 2ik(\xi + \eta).$$

Éliminant $M - a$, nous arrivons à cette équation différentielle indéterminée

$$(1) \qquad 2ik(xY' + \eta')(xY + \xi + \eta) + \frac{x^2}{2}Y'' + \eta''x + \eta_0 = 0.$$

---

[1] *Math. Annalen*, t. XX, p. 424.

Pour la résoudre, différentions-la trois fois successivement par rapport à x, ce qui donne

$$\text{(2)} \qquad Y'(\xi x)''' + \eta'\xi''' = 0.$$

Je dis qu'on ne peut pas supposer $\xi''' \neq 0$. En effet, Y' n'étant pas nul, sans quoi la surface serait une développable, on pourrait, si ξ''' n'était pas nul, écrire

$$\frac{(\xi x)'''}{\xi'''} + \frac{\eta'}{Y'} = 0.$$

Cette équation se sépare et donne, avec une constante arbitraire m,

$$(\xi x)''' = m\xi''', \qquad \eta' = -mY';$$

dès lors, l'élément linéaire $\lambda\, dx\, dy$ devient

$$ds^2 = (x - m)Y'\, dx\, dy,$$

ce qui ne correspond qu'à des surfaces développables imaginaires.

7. Soit donc désormais $\xi''' = 0$. Comme on a aussi

$$(\xi x)''' = \xi''' x + 3\xi'' = 0,$$

la dérivée ξ'' est nulle également, et il vient, avec deux arbitraires b, β,

$$\xi = bx + \beta.$$

Substituons ξ dans l'équation (1); nous trouvons

$$2ik[x(Y + b) + \eta + \beta](xY' + \eta') + \frac{x^2}{2}Y'' + \eta'' x + \eta_0 = 0.$$

Égalons à zéro les coefficients de x^2 et x, ainsi que le terme indépendant

$$4ikY'(Y + b) + Y'' = 0, \qquad 2ik[(Y + b)(\eta + \beta)]' + \eta'' = 0,$$
$$2ik\eta'(\eta + \beta) + \eta_0 = 0.$$

La dernière de ces équations fournira η_0 quand la fonction η sera connue. Les deux premières s'intègrent immédiatement. On en tire, avec deux arbitraires m et h,

$$2ik(Y + b)^2 + Y' = -2ikm^2, \qquad 2ik(Y + b)(\eta + \beta) + \eta' = 2h.$$

Supposons d'abord $m \neq 0$; nous aurons

$$\frac{d(Y+b)}{(Y+b)^2+m^2} = -2ik\,dy, \qquad Y+b = -m \operatorname{tang} 2ikmy.$$

Eu égard à cette expression de $Y+b$, l'équation en η devient

$$-2ikm(\eta+\beta)\sin 2ikmy + \eta' \cos 2ikmy = 2ikmg \cos 2ikmy \qquad (2h = 2ikmg)$$

et donne par intégration

$$(\eta+\beta)\cos 2ikmy = g \sin 2ikmy + l,$$
$$\eta+\beta = g \operatorname{tang} 2ikmy + \frac{l}{\cos 2ikmy}.$$

Nous avons alors

$$Y' = -\frac{2ikm^2}{\cos^2 2ikmy}, \qquad \eta' = \frac{2ikm(g + l\sin 2ikmy)}{\cos^2 2ikmy};$$

d'où l'élément linéaire

$$ds^2 = (xY' + \eta')\,dx\,dy = \frac{2ikm(-mx + g + l\sin 2ikmy)}{\cos^2 2ikmy}\,dx\,dy,$$

ou, sous une autre forme,

$$ds^2 = \left(x' + \frac{\gamma y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) dx'\,dy'.$$

Si l'on fait $m = 0$, on trouve

$$-\frac{dY}{(Y+b)^2} = 2ik\,dy, \qquad Y+b = \frac{1}{2iky};$$

l'équation en η devient alors

$$\eta + \beta + \eta' y = 2hy;$$

son intégration introduit une nouvelle constante l,

$$y(\eta+\beta) = hy^2 + l, \qquad \eta + \beta = hy + \frac{l}{y}.$$

Les expressions trouvées pour Y et η donnent

$$Y' = -\frac{1}{2iky^2}, \qquad \eta' = \frac{hy^2 - l}{y^2},$$

d'où l'élément linéaire

$$ds^2 = (x\mathrm{Y}' + \eta')\,dx\,dy = \left(-\frac{x}{2ik} - l + hy^2\right)\frac{dx\,dy}{y^2},$$

qu'on peut aussi écrire

$$ds^2 = \left(x' + \frac{\gamma}{y'^2}\right)dx'\,dy'.$$

Les deux éléments linéaires que nous venons d'obtenir

$$ds^2 = \left(x' + \frac{\gamma y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)dx'\,dy', \qquad ds^2 = \left(x' + \frac{\gamma}{y'^2}\right)dx'\,dy'$$

sont, abstraction faite d'un élément linéaire de développable imaginaire, les deux seuls pour lesquels le problème des cercles géodésiques admette une intégrale quadratique, mais linéaire par rapport à l'une des dérivées p et q. Il est à peine besoin de faire remarquer qu'aucun de ces éléments linéaires ne convient à des surfaces réelles. On sait, en effet, que, si l'élément linéaire

$$ds^2 = (x + \mathrm{Y})\,dx\,dy$$

convient à des surfaces réelles, Y ne peut avoir que l'une des deux expressions

$$\mathrm{Y} = \gamma y, \qquad \mathrm{Y} = \frac{\gamma}{\sqrt{y}}.$$

Ajoutons enfin que ni l'un ni l'autre ne peut être ramené à la forme harmonique. C'est ce dont on s'assure en déterminant la fonction η de la seule variable y par la condition que la fonction $\lambda = x + \eta$ satisfasse à l'équation de M. Darboux

$$2\mathrm{X}\lambda''_{x^2} + 3\mathrm{X}'\lambda'_x + \lambda\mathrm{X}'' = 2\mathrm{Y}\lambda''_{y^2} + 3\mathrm{Y}'\lambda'_y + \lambda\mathrm{Y}'',$$

par laquelle on exprime que l'élément linéaire $\lambda\,dx\,dy$ est réductible à la forme harmonique.

8. *Second cas.* — Le produit AC n'est pas nul. Revenons à l'identité

$$\begin{aligned}
&2(\mathrm{A}p + a)\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_x(p+\mathrm{M})(q+\mathrm{N}) + \frac{\mathrm{M}'_x}{\lambda}(q+\mathrm{N}) + \frac{\mathrm{N}'_x}{\lambda}(p+\mathrm{M})\right] - \frac{q+\mathrm{N}}{\lambda}(\mathrm{A}'_x p^2 + \mathrm{C}'_x q^2 + 2a'_x p + 2b'_x q + 2c'_x)\\
&+ 2(\mathrm{C}q + b)\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_y(p+\mathrm{M})(q+\mathrm{N}) + \frac{\mathrm{M}'_y}{\lambda}(q+\mathrm{N}) + \frac{\mathrm{N}'_y}{\lambda}(p+\mathrm{M})\right] - \frac{p+\mathrm{M}}{\lambda}(\mathrm{A}'_y p^2 + \mathrm{C}'_y q^2 + 2a'_y p + 2b'_y q + 2c'_y)\\
&\equiv 2(\alpha p + \beta q + \gamma)\,[(p+\mathrm{M})(q+\mathrm{N}) - \lambda].
\end{aligned}$$

Nous avons vu que A ne dépend que de x, et C que de y; et nous supposons maintenant le produit AC différent de zéro. En changeant la variable x et aussi la variable y, nous pouvons réduire les deux fonctions A et C à l'unité. Alors l'identité proposée devient

$$\begin{aligned}(p+a)\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_x(p+M)(q+N)+\frac{M'_x}{\lambda}(q+N)+\frac{N'_x}{\lambda}(p+M)\right]-\frac{q+N}{\lambda}(a'_x p+b'_x q+c'_x)\\ +(q+b)\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_y(p+M)(q+N)+\frac{M'_y}{\lambda}(q+N)+\frac{N'_y}{\lambda}(p+M)\right]-\frac{p+M}{\lambda}(a'_y p+b'_y q+c'_y)\\ \equiv(\alpha p+\beta q+\gamma)[(p+M)(q+N)-\lambda].\end{aligned}$$

La comparaison des termes en p^2q et q^2p donne

$$\alpha=\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_x,\qquad \beta=\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_y.$$

Identifions les termes en p^2 et q^2; nous aurons

$$(1)\qquad a'_y=N'_x,\qquad b'_x=M'_y;$$

puis ceux en pq; il viendra

$$\gamma=a\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_x-\frac{a'_x}{\lambda}+b\left(\frac{1}{\lambda}\right)'_y-\frac{b'_y}{\lambda}+\frac{M'_x+N'_y}{\lambda}.$$

Comparons les termes en p et en q, et remplaçons γ par sa valeur; nous trouvons

$$(2)\qquad \begin{cases} c'_y=aN'_x+bN'_y+N\,b'_y-NN'_y-\lambda'_x,\\ c'_x=bM'_y+aM'_x+M\,a'_x-MM'_x-\lambda'_y.\end{cases}$$

Identifions enfin les termes indépendants, en ayant égard aux expressions de γ, c'_x et c'_y. Il vient, tous calculs faits,

$$(3)\qquad (M\lambda)'_x-(a\lambda)'_x+(N\lambda)'_y-(b\lambda)'_y=0.$$

9. Nous avons maintenant à discuter les cinq équations (1), (2) et (3) auxquelles s'ajoute la condition d'intégrabilité $c''_{yx}=c''_{xy}$,

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial x}[(bN)'_y+aN'_x-NN'_y-\lambda'_x]=\frac{\partial}{\partial y}[(aM)'_x+bM'_y-MM'_x-\lambda'_y].$$

Remarquons auparavant que, dans l'hypothèse

$$M=N=k=0,$$

qui correspond aux *lignes* géodésiques, cette dernière condition donne $\lambda''_{x^2} - \lambda''_{y^2} = 0$, d'où $\lambda = \varphi(x+y) - f(x-y)$. On retrouve les surfaces harmoniques. Le calcul s'achève sans difficulté et conduit à l'intégrale quadratique connue, écrite sous forme non homogène

$$I = p^2 + q^2 - 2[\varphi(x+y) + f(x-y)] = \text{const.}$$

Nous pouvons faire abstraction des relations (2) qui déterminent c, moyennant la condition (4). Pour satisfaire aux équations (1), nous introduirons deux nouvelles fonctions inconnues ρ et σ en posant

$$(1') \qquad a = \rho'_x, \qquad N = \rho'_y; \qquad b = \sigma'_y, \qquad M = \sigma'_x.$$

Ces fonctions devront satisfaire à l'équation

$$(5) \qquad \rho''_{xy} = \sigma''_{xy} = N'_x - M'_y = 2ik\lambda.$$

Remplaçons maintenant a, b, M, N par leurs expressions (1′) dans les relations (3) et (4); il vient

$$(3') \qquad \frac{\partial}{\partial x}[\lambda(\rho'_x - \sigma'_x)] = \frac{\partial}{\partial y}[\lambda(\rho'_y - \sigma'_y)],$$

pour la première, et pour la seconde

$$\frac{\partial}{\partial x}[(\rho'_x - \sigma'_x)\rho''_{xy} - (\rho'_y - \sigma'_y)\rho''_{y^2} + \rho'_y\sigma''_{y^2} + \sigma'_x\rho''_{xy} - \lambda'_x]$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}[(\sigma'_y - \rho'_y)\sigma''_{xy} - (\sigma'_x - \rho'_x)\sigma''_{x^2} + \sigma'_x\rho''_{xy} + \rho'_x\sigma''_{xy} - \lambda'_y],$$

ce qu'on peut écrire, en doublant les deux membres,

$$\frac{\partial}{\partial x}[(\rho'^2_x)'_y - (\rho'^2_y)'_x + 2(\rho'_y\sigma'_y)'_y - 2\lambda'_x] = \frac{\partial}{\partial y}[(\sigma'^2_y)'_x - (\sigma'^2_x)'_y + 2(\rho'_x\sigma'_x)'_x - 2\lambda'_y],$$

ou encore, en groupant convenablement les termes,

$$(4') \qquad \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}[(\rho'_x - \sigma'_x)^2 - (\rho'_y - \sigma'_y)^2] = 2(\lambda''_{x^2} - \lambda''_{y^2}).$$

On voit que les fonctions ρ et σ n'entrent que par leur différence dans les équations (3′), (4′) et (5), ce qui conduit à poser

$$(6) \qquad \zeta = \rho - \sigma.$$

Alors l'équation (5) devient

$$(5') \qquad \zeta''_{xy} = 2ik\lambda.$$

Portant cette expression de λ dans la relation (3'), on trouve

$$(3'') \qquad \frac{\partial}{\partial x}(\zeta'_x \zeta''_{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(\zeta'_y \zeta''_{xy}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\zeta'^2_x - \zeta'^2_y) = 0.$$

D'autre part, l'équation (4') n'est autre que

$$(4'') \qquad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\zeta'^2_x - \zeta'^2_y) = 2(\lambda''_{x^2} - \lambda''_{y^2}).$$

Ainsi la différence $\lambda''_{x^2} - \lambda''_{y^2}$ est nulle. D'où cette conclusion :

Les seules surfaces réelles pour lesquelles l'équation aux cercles géodésiques admette une intégrale quadratique sont des surfaces harmoniques.

10. Remarquons tout de suite que cette propriété n'appartient pas à toutes les surfaces harmoniques. Soit, en effet,

$$\lambda = \Phi'(x+y) - F'(x-y);$$

les deux équations (3'') et (4'') se confondent en une seule; mais les fonctions Φ et F doivent être choisies de manière que les deux équations

$$\zeta''_{xy} = 2ik[\Phi'(x+y) - F'(x-y)], \qquad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\zeta'^2_x - \zeta'^2_y) = 0$$

soient compatibles. Nous verrons qu'elles comportent des solutions communes en nombre infini. Soit ζ l'une d'elles; cette fonction ζ étant connue, l'élément linéaire est connu, puisque nous avons $2ik\lambda = \zeta''_{xy}$. On connaît aussi la différence $\rho - \sigma = \zeta$, qui seule est déterminée. On peut se donner *arbitrairement* la somme

$$\rho + \sigma = \mu(x, y).$$

Alors ρ et σ seront connus. Les formules (1') fournissent immédiatement M, N, a et b; la fonction c s'obtient par quadrature, ses deux dérivées partielles étant données par les équations (2), maintenant compatibles. L'intégrale quadratique est entièrement connue. On sait l'usage qu'il en faut faire pour trouver l'équation *finie* des cercles géodésiques.

où l, m, n, p sont des constantes arbitraires. L'élément linéaire ainsi obtenu

$$\lambda\, dx\, dy = r\left[le^{r(x+y)} + me^{-r(x+y)} - ne^{r(x-y)} - pe^{-r(x-y)}\right] dx\, dy$$

correspond à des surfaces dont la courbure totale

$$\frac{-8r^3(lm-np)}{\lambda^3}$$

n'est pas nulle en général. De plus, on voit qu'elle est fonction de λ, et, comme le paramètre différentiel $\Delta\lambda = \lambda'_x \lambda'_y : \lambda$ ne se réduit pas à une fonction de λ, les lignes d'égale courbure ne sont pas parallèles, en sorte que l'élément linéaire $\lambda\, dx\, dy$ ne convient pas à des surfaces de révolution. On aura donc bien là une véritable solution de notre problème. Nous ne nous occuperons pas ici de trouver toutes les autres.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS

DES

GROUPES DE SUBSTITUTIONS D'ORDRE DONNÉ,

PAR M. EDMOND MAILLET,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

INTRODUCTION.

Quand on se donne *a priori* l'ordre d'un groupe de substitutions, ce groupe doit satisfaire dans bien des cas à certaines conditions : ainsi, un groupe d'ordre $p_1 p_2 \ldots p_n p^\alpha$ où $p_1, p_2, \ldots, p_n, p$ sont des nombres premiers différents et où $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < p$ est toujours composé et même résoluble (¹).

Réciproquement, des propriétés d'un groupe étant données, son ordre doit satisfaire dans bien des cas à certaines conditions : ainsi, quand p^m est la plus haute puissance du nombre premier p qui divise l'ordre $\mathcal{G}$ d'un groupe G (²), ce groupe renfermera au moins un groupe d'ordre p^m; on aura

$$(1) \qquad \mathcal{G} = p^m \nu(1 + np),$$

où ν est premier à p, et où $p^m \nu$ est l'ordre du groupe des substitutions de G qui sont permutables à un groupe de G d'ordre p^m; de plus, les divers groupes d'ordre p^m de G seront les transformés d'un d'entre eux par les substitutions de G (³).

(¹) FROBENIUS, *Sitzungsberichte der k. p. Akademie der Wiss. zu Berlin*, 4 mai 1893.

(²) En général, quand nous désignerons par A, B, ..., G, H, ... des groupes de substitutions, nous désignerons par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, ..., respectivement l'ordre de ces groupes.

(³) SYLOW, *Théorèmes sur les groupes de substitutions* (*Mathematische Annalen*, t. V, p. 584).

Nous nous proposons de donner ici un certain nombre de théorèmes relatifs aux deux problèmes généraux dont nous venons de parler; il nous arrivera, pour la facilité de l'exposé, d'établir et d'énoncer quelques propriétés déjà publiées soit explicitement, soit implicitement. Pour éviter *a priori* tout oubli à cet égard, nous renverrons aux œuvres de M. Jordan et en particulier à son *Traité des substitutions,* au *Traité des substitutions* de M. Netto, et aux divers Mémoires que nous aurons occasion de citer.

Parmi les propriétés que nous établirons, nous croyons devoir mentionner particulièrement les suivantes :

1° L'ordre $\mathcal{G}$ d'un groupe G de classe $N - u_0$ et de degré N divise le produit

$$\mathfrak{S} = N(N-1)\ldots(N-u_0).$$

Nous en donnons plusieurs démonstrations.

2° Dans la formule (1) de M. Sylow, quand $m > 1$ et $n < p$, G est composé, et ne peut être primitif que s'il est linéaire et de degré p^θ.

De plus, si l'on fait des hypothèses particulières sur le groupe d'ordre p^m contenu dans G, on trouve des conditions plus restrictives; ainsi :

3° Dans la formule (1) de M. Sylow, quand $m > 1$ et quand G contient une substitution d'ordre p^m, G ne peut être simple ou primitif que si $n \geq p^{m-1}$.

I.

M. Frobenius a généralisé la formule (1) précitée de M. Sylow ainsi qu'il suit [1] :

Théorème. — *Soit* G *un groupe de substitutions d'ordre* $\mathcal{G}$ *en contenant deux autres* H *et* K *d'ordres* $\mathfrak{H}$ *et* $\mathfrak{K}$; *on aura*

$$\mathcal{G} = \mathfrak{K}(N_1 + 2N_2 + \ldots + qN_q + \ldots). \tag{2}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $N_q \neq 0$ *est qu'il existe dans* K *un groupe d'ordre* $\frac{\mathfrak{H}}{q}$ *maximum parmi les groupes de* K *qu'une substitution de* G *convenablement choisie transforme en un groupe de* H.

Nous avons d'ailleurs établi postérieurement le théorème ci-dessus dans le cas particulier où H = K [2].

---

[1] *Ueber die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul* [*Journal für Mathematik,* t. CI, p. 281, formule (3)].

[2] *Thèse de Doctorat,* p. 114; Gauthier-Villars, 1892.

Nous allons démontrer la formule de M. Frobenius par un procédé semblable à celui qu'a employé M. Sylow pour obtenir sa formule.

Conservons les notations précédentes : soient z_1 une fonction rationnelle des lettres de G invariable par toutes les substitutions de K, mais variable par toute autre substitution;

$$z_1, z_2, \ldots, z_{\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{K}}} \tag{3}$$

les $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{K}}$ valeurs différentes que prend z_1 quand on y opère les substitutions de G.

Effectuons dans les fonctions (3) les substitutions de H,

$$1, h_2, \ldots, h_{\mathfrak{H}}. \tag{4}$$

Ces substitutions faisant partie de G changeront une quelconque z_i des fonctions (3) en un certain nombre d'entre elles

$$z_i, z_{i_1}, \ldots, z_{i_{q-1}}, \tag{5}$$

dérivées de z_i par les substitutions de H. Ces dernières échangeront les fonctions (5) exclusivement entre elles; celles des substitutions de H qui laissent z_i, par exemple, immobile, formeront un groupe L de H, d'ordre $\mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{H}}{q}$.

Par hypothèse, il existe une substitution g_i de G qui, opérée sur z_1, change z_1 en z_i; soit l_j une substitution quelconque de L : la substitution $g_i l_j g_i^{-1}$ laisse z_1 invariable, et par suite fait partie de K. Le groupe $g_i \mathrm{L} g_i^{-1}$, transformé de L par g_i^{-1} est donc contenu dans K, et il existe dans K un groupe $g_i \mathrm{L} g_i^{-1}$, d'ordre $\mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{H}}{q}$, que la substitution g_i de G transforme en un groupe L de H.

Je dis que $g_i \mathrm{L} g_i^{-1}$ est maximum parmi les groupes de K qui jouissent de cette propriété par rapport à g_i, c'est-à-dire qu'il les contient tous. En effet, soit k une substitution de K que g_i transforme en une substitution $g_i^{-1} k g_i$ de H : cette dernière laissera z_i immobile et par suite fera partie de L; donc k fera partie de $g_i \mathrm{L} g_i^{-1}$.

En formant toutes les suites différentes analogues à (5), suites qui, ensemble, constituent la suite (3), désignant par N_q le nombre des suites (5)

différentes pour lesquelles q a la même valeur, et remarquant que deux suites différentes analogues à (5) n'ont aucune fonction commune, on a

$$\sum_q q\mathrm{N}_q = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{K}},$$

c'est-à-dire la formule (2).

On peut rendre la formule (2) symétrique en $\mathfrak{H}$ et $\mathcal{K}$ en divisant les deux membres par $\mathfrak{H}\mathcal{K}$, et remarquant que L est maximum parmi les groupes de H que g_i^{-1} transforme en un groupe de K, et que son ordre est égal à celui de $g_i \mathrm{L} g_i^{-1}$. On obtient

$$(2\ bis)\quad \frac{\mathcal{G}}{\mathfrak{H}\mathcal{K}} = \frac{\mathrm{N}_1}{\mathfrak{H}} + \frac{\mathrm{N}_2}{\left(\frac{\mathfrak{H}}{2}\right)} + \ldots + \frac{\mathrm{N}_q}{\left(\frac{\mathfrak{H}}{q}\right)} + \ldots = \frac{\mathrm{N}_1}{\mathcal{L}_1} + \frac{\mathrm{N}_2}{\mathcal{L}_2} + \ldots + \frac{\mathrm{N}_q}{\mathcal{L}_q} + \ldots.$$

C'est sous cette forme, à la notation près, que la formule a été donnée par M. Frobenius [1].

Remarque. — La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{N}_1 \neq 0$ est qu'il existe dans G une substitution transformant en H un groupe de K. Si donc $\mathfrak{H}$ ne divise pas $\mathcal{K}$, on aura $\mathrm{N}_1 = 0$. Au contraire, si H est contenu dans K, on aura toujours $\mathrm{N}_1 \neq 0$.

En particulier, quand $\mathrm{H} = \mathrm{K}$, $\mathrm{N}_1\mathcal{K}$ est l'ordre du groupe des substitutions de G qui sont permutables à K.

Corollaire I. — Si $\nu\mathcal{K}$ est l'ordre du groupe des substitutions de G permutables à K, on aura

$$q\mathrm{N}_q \equiv 0 \pmod{\nu},$$

et G renfermera exactement $\frac{q\mathrm{N}_q}{\nu}$ transformés distincts de K ayant en commun avec H $\frac{\mathfrak{H}}{q}$ substitutions.

Nous venons de voir que $g_i \mathrm{L} g_i^{-1}$ est maximum parmi les groupes de K que g_i transforme en un groupe L de H, c'est-à-dire que $g_i^{-1}\mathrm{K}g_i$ et H ont

---

[1] Bien que, dans la démonstration, interviennent des substitutions entre des lettres, on sait que ce théorème, comme d'autres de la théorie des substitutions, est applicable aux groupes plus généraux d'opérations tels que ceux considérés par exemple par M. Frobenius, un pareil groupe pouvant toujours se représenter par un groupe de substitutions transitif, dont l'ordre égale le degré, et qui lui est holoédriquement isomorphe.

en commun exactement les substitutions du groupe L. Réciproquement, si un transformé $g_i^{-1} K g_i$ de K par g_i a en commun avec H exactement les $\mathfrak{L}$ substitutions d'un groupe L, la fonction z_i obtenue en effectuant g_i dans z_1 fait partie d'une suite de q fonctions analogues à (5), avec $q\mathfrak{L} = \mathfrak{H}$.

Dès lors, soit M le groupe des substitutions de G permutables à K, et $\mathfrak{M} = \nu\mathfrak{K}$;

$$(6) \qquad 1, m_2, \ldots, m_{\mathfrak{M}}$$

les substitutions de M. Les substitutions

$$(7) \qquad g_i, m_2 g_i, \ldots, m_{\mathfrak{M}} g_i$$

sont telles que $g_i^{-1} K g_i = (m_\lambda g_i)^{-1} K (m_\lambda g_i)$, et sont différentes; par suite les fonctions analogues à z_i correspondantes font toutes partie de suites analogues à (5), pour lesquelles q a la même valeur.

Soit $g_{i'}$ une substitution de G différente des substitutions (7), la suite

$$(8) \qquad g_{i'}, m_2 g_{i'}, \ldots, m_{\mathfrak{M}} g_{i'}$$

jouira des mêmes propriétés que la suite (7), et chacune de ses substitutions transformera K en un groupe $g_{i'}^{-1} K g_{i'} \neq g_i^{-1} K g_i$, sans quoi on verrait que $g_{i'}$, par exemple, doit faire partie de la suite (7).

En continuant de la sorte et n'opérant que sur des substitutions g_i, $g_{i'}$, $g_{i''}$, ..., pour lesquelles q a la même valeur, et telles que $g_{i''}$ par exemple ne fasse pas partie des suites (7) et (8), on répartit ces substitutions en un certain nombre de suites analogues à (7) et (8), renfermant chacune $\mathfrak{M} = \nu\mathfrak{K}$ substitutions. Ces suites n'ont deux à deux aucune substitution commune, car l'égalité $m_\lambda g_i = m_{\lambda'} g_{i'}$, par exemple, entraînerait $g_{i'} = m_{\lambda'}^{-1} m_\lambda g_i$ contrairement à l'hypothèse.

Le nombre A des substitutions de G, pour lesquelles q a la même valeur, est donc un multiple de $\nu\mathfrak{K}$.

D'autre part, le nombre des fonctions z_i correspondantes est $q N_q$. Il y a, d'ailleurs, exactement $\mathfrak{K}$ substitutions de G qui changent z_1 en z_i par exemple, et, par suite, le nombre des substitutions de G différentes qui changent z_1 en une des fonctions z_i faisant partie des suites analogues à (5) pour lesquelles q a la valeur considérée est $\mathfrak{K} q N_q$. Dès lors

$$A = \mathfrak{K} q N_q \equiv 0 \pmod{\nu\mathfrak{K}}$$

ou

$$(9) \qquad q N_q \equiv 0 \pmod{\nu}.$$

Le nombre des suites analogues à (7) et (8) est $\frac{A}{\nu\mathcal{K}} = \frac{qN_q}{\nu}$; à chacune d'elles correspondra un transformé différent de K ayant en commun avec H exactement $\mathcal{L} = \frac{\mathfrak{H}}{q}$ substitutions.

Corollaire II. — Quand $K = H$, on a

$$q N_q \equiv 0 \pmod{N_1}$$

et G renferme exactement $\frac{qN_q}{N_1}$ transformés distincts de K ayant en commun avec K $\frac{\mathcal{K}}{q}$ substitutions.

Ce corollaire résulte de la remarque et du corollaire précédents.

Corollaire III. — Soit p^m la plus haute puissance d'un nombre premier p qui divise l'ordre $\mathcal{G}$ d'un groupe G; un groupe H d'ordre p^α, avec $\alpha < m$, contenu dans G est toujours contenu dans un certain nombre d'autres groupes de G d'ordre p^α, avec $\alpha' > \alpha$, et en particulier dans un groupe de G d'ordre p^m.

Appliquons le théorème précédent, en faisant $H = K$, $\mathfrak{H} = p^\alpha$; d'après la formule (2)

$$\mathcal{G} = p^\alpha(N_1 + pN_p + \ldots + p^\alpha N_{p^\alpha}).$$

Par hypothèse, $\mathcal{G} \equiv 0 \pmod{p^m}$, et, puisque $m > \alpha$,

$$N_1 + pN_p + \ldots + p^\alpha N_{p^\alpha} \equiv N_1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Or G renferme un groupe H'_1 d'ordre $p^\alpha N_1$, formé des substitutions de G qui sont permutables à H; si $p^{\alpha'}$ est la plus haute puissance de p qui divise $p^\alpha N_1$, on a $\alpha' > \alpha$, puisque $N_1 \equiv 0 \pmod{p}$, et, d'après un théorème de M. Sylow, déjà cité [formule (1)], H'_1 contient un groupe H' d'ordre $p^{\alpha'}$. Le groupe H' contient d'ailleurs H, sans quoi le groupe dérivé de H et de H' serait d'ordre $p^{\alpha'_1}$ avec $\alpha'_1 > \alpha'$, puisque H est permutable aux substitutions de H'; ce groupe dérivé serait alors contenu dans H'_1 dont l'ordre $p^\alpha N_1$ serait divisible par $p^{\alpha'_1}$ contrairement à l'hypothèse.

Si maintenant $\alpha' < m$, on peut opérer sur H' comme on l'a fait sur H; et ainsi de suite. On trouvera une suite de groupes d'ordres p^α, $p^{\alpha'}$, ...

croissants, et tels que chacun d'eux contienne les précédents; on finira par en trouver un d'ordre p^m parmi eux, puisque α, α', ... sont des nombres entiers croissants et $\leqq m$, dont le nombre est limité.

Théorème I. — *Soient* G *un groupe de substitutions,* p^m *la plus haute puissance du nombre premier* p *qui divise l'ordre* $\mathcal{G}$ *de* G. *On aura*

$$(10) \qquad \mathcal{G} = p^m \nu (1 + n_1 p + \ldots + n_\alpha p^\alpha + \ldots + n_m p^m)$$

où $p^m\nu$ *est l'ordre du groupe des substitutions de* G *qui sont permutables à un groupe de* G *d'ordre* p^m.

La condition nécessaire et suffisante pour que $n_\alpha \neq 0$ *est qu'on puisse trouver dans* G *deux groupes d'ordre* p^m *ayant en commun exactement* $p^{m-\alpha}$ *substitutions. Il y a exactement* $n_\alpha p^\alpha$ *groupes d'ordre* p^m *ayant en commun avec un groupe d'ordre* p^m *exactement* $p^{m-\alpha}$ *substitutions.*

En effet, appliquons le théorème de M. Frobenius, en faisant H = K, $\mathfrak{H} = p^m$; d'après la formule (2),

$$\mathcal{G} = p^m (N_1 + p N_p + \ldots + p^\alpha N_{p^\alpha} + \ldots + p^m N_{p^m}).$$

On sait qu'on a ici $N_1 = \nu$; de plus, la formule (9) donne

$$p^\alpha N_{p^\alpha} \equiv 0 \pmod{\nu}$$

et, puisque ν est premier à p, d'après un théorème de M. Sylow déjà cité [formule (1)], on peut poser

$$p^\alpha N_{p^\alpha} = \nu . n_\alpha . p^\alpha,$$

n_α étant entier, en sorte que

$$(10) \qquad \mathcal{G} = p^m \nu (1 + n_1 p + \ldots + n_\alpha p^\alpha + \ldots + n_m p^m).$$

Dans cette formule, la condition nécessaire et suffisante pour que $n_\alpha \neq 0$ est que N_{p^α} le soit, ou, d'après ce qu'on a vu aux corollaires I et II du théorème de M. Frobenius démontré précédemment, qu'il existe dans G, au moins un transformé de H par les substitutions de G ayant en commun avec H exactement $p^{m-\alpha}$ substitutions.

De plus, d'après un théorème de M. Sylow déjà cité [formule (1)], tous les groupes de G d'ordre p^m sont les transformés de H par les substitutions

de G. Les deux corollaires que nous venons d'utiliser montrent d'ailleurs qu'il existe exactement dans G $\frac{p^\alpha N_{p^\alpha}}{\nu} = n_\alpha p^\alpha$ transformés de H ayant chacun en commun, avec H, $p^{m-\alpha}$ substitutions. Donc G contiendra exactement $n_\alpha p^\alpha$ groupes d'ordre p^m ayant en commun avec H $p^{m-\alpha}$ substitutions et pas davantage.

Ce théorème donnera lieu, dans la suite, à un certain nombre d'applications.

Théorème II. — *Soit* G *un groupe de substitutions de degré* N *et d'ordre* $\mathcal{G} = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$: $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *étant des nombres premiers différents; soient* $N - u_\lambda$, $N - u_{\lambda-1}$, …, $N - u_1$, $N - u_0$ *les nombres différents qui expriment les degrés des divers groupes d'ordre* $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$, …, $p_k^{\alpha_k}$ *contenus dans* G : *l'ordre* $\mathcal{G}$ *du groupe* G *divise le nombre*

$$\mathcal{A} = (N - u_\lambda)(N - u_{\lambda-1}) \ldots (N - u_1)(N - u_0).$$

D'après un théorème de M. Sylow, déjà employé, G contient un groupe H_i d'ordre $\mathcal{G}_i = p_i^{m_i}$; soient $(N - v_\mu)$, $(N - v_{\mu-1})$, …, $(N - v_1)$, $(N - v_0)$ avec $v_\mu < v_{\mu-1} < \ldots < v_1 < v_0$, les degrés des divers groupes d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ contenus dans H_i (α_i pouvant prendre toutes les valeurs $\leqq m_i$). Je dis que $p_i^{m_i}$ divise le nombre

$$\mathcal{B}_i = (N - v_\mu)(N - v_{\mu-1}) \ldots (N - v_1)(N - v_0).$$

En effet, quand $\mu = 0$, on voit facilement que cette propriété a lieu; admettons qu'elle soit vraie quand le produit $\mathcal{B}_i$ ne renferme pas plus de μ facteurs, et montrons que la propriété a encore lieu quand $\mathcal{B}_i$ renferme $\mu + 1$ facteurs.

Soit a_1 une lettre quelconque déplacée par H_i; ce groupe permute a_1 avec $p_i^{\alpha_i}$ des lettres qu'il déplace; il permutera de même une lettre b_1 différente des $p_i^{\alpha_i}$ précédentes avec $p_i^{\beta_i}$ lettres différentes de celles-ci, et ainsi de suite.

Soit α_i la plus petite des quantités $\alpha_i, \beta_i, \ldots$; le degré de H_i étant, par hypothèse, $N - v_\mu$, on aura

$$p_i^{\alpha_i} + p_i^{\beta_i} + \ldots = N - v_\mu \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}.$$

Désignons par J le groupe des substitutions de H_i qui laissent a_1 immobile : J sera de degré $< N - v_\mu$; la quantité qui joue à l'égard de J le même

rôle que $\mathfrak{M}_i$ à l'égard de H_i sera

$$\mathfrak{M}'_i = (N - v_\rho)(N - v_{\rho'})\ldots,$$

ne renfermera que des facteurs de $\mathfrak{M}_i$, puisque J est contenu dans H_i, et ne contiendra pas le facteur $(N - v_\mu)$. D'après l'hypothèse, l'ordre $\mathfrak{I}$ de J divisera $\mathfrak{M}'_i$. Or

$$\mathfrak{H}_i = p_i^{\alpha_i}.\mathfrak{I},$$

$p_i^{\alpha_i}$ divisant $N - v_\mu$ d'après ce qu'on a vu tout à l'heure. $\mathfrak{H}_i$ divisera donc $(N - v_\mu)\mathfrak{I}$, *a fortiori* $(N - v_\mu)\mathfrak{M}'_i$ et $\mathfrak{M}_i$.

Les divers groupes d'ordre $p_i^{m_i}$ contenus dans G étant d'ailleurs les transformés d'un d'entre eux par les substitutions de G sont tous semblables, et la quantité $\mathfrak{M}_i$ est la même pour tous.

Ceci posé, les k quantités $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$ analogues à $\mathfrak{M}_i$ et correspondant respectivement aux groupes de G d'ordres $p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_k^{m_k}$ sont telles que

$$\mathfrak{M}_1 \equiv 0 \pmod{p_1^{m_1}}, \qquad \mathfrak{M}_2 \equiv 0 \pmod{p_2^{m_2}}, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{M}_k \equiv 0 \pmod{p_k^{m_k}}.$$

Le produit $\mathcal{G} = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$ divise donc le plus petit commun multiple des quantités $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$, et *a fortiori* le nombre $\mathfrak{M}$, qui est évidemment multiple de ces k nombres.

Corollaire. — L'ordre $\mathcal{G}$ d'un groupe G de classe $N - u_0$ et de degré N divise le produit $\mathfrak{S} = N(N-1)\ldots(N - u_0)$.

En effet, d'après la définition de la classe (¹), u_0 est la plus grande des quantités $u_\lambda, u_{\lambda-1}, \ldots, u_1, u_0$. Le nombre $\mathfrak{S}$ est donc un multiple de $\mathfrak{M}$, et, d'après le théorème précédent, $\mathcal{G}$ divise $\mathfrak{S}$.

On peut d'ailleurs établir ce corollaire directement :

Première démonstration. — Soient p un nombre premier qui divise $\mathcal{G}$; p^λ, p^μ, p^m les plus hautes puissances de p qui divisent respectivement $N(N-1)\ldots(N-u_0)$, $1.2\ldots(N - u_0 - 1)$, et $\mathcal{G}$; par suite, $p^{\lambda+\mu}$ la plus haute puissance de p qui divise $1.2\ldots N$. Il suffit évidemment de prouver que l'on a $m \leqq \lambda$.

D'après un théorème déjà employé, G contient un groupe K d'ordre $\mathfrak{K} = p^m$; le groupe symétrique F entre les N lettres de G contient de même un groupe L, d'ordre $\mathfrak{L} = p^{\lambda+\mu}$. D'après le corollaire III du théorème de

(¹) M. Jordan a défini la classe d'un groupe le nombre minimum de lettres que déplace une substitution de ce groupe différente de l'unité.

M. Frobenius on peut choisir L de façon que K y soit contenu. De même, un groupe symétrique F′ entre $(N - u_0 - 1)$ des lettres de G contiendra un groupe K'_1, d'ordre $\mathcal{K}'_1 = p^\mu$, lequel sera toujours contenu dans un groupe L′ de F, d'ordre $\mathcal{L}' = p^{\lambda+\mu} = \mathcal{L}$; on sait que L′ est un transformé de L par une substitution σ de F, en sorte que $\sigma L' \sigma^{-1} = L$, et, de même, $\sigma K'_1 \sigma^{-1} = K'$, K′ étant un groupe d'ordre $\mathcal{K}' = p^\mu$, contenu dans L et de degré $N - u_0 - 1$. K′ n'aura donc en commun avec K, qui est de classe $\geqq N - u_0$, d'autre substitution que l'unité.

Soient maintenant

$$\begin{array}{llll} k_1 = 1, & k_2, & \ldots, & k_{p^m}, \\ k'_1 = 1, & k'_2, & \ldots, & k'_{p^\mu} \end{array}$$

les substitutions de K et de K′ respectivement. Les substitutions de la forme $k_j k'_{j'}$ sont toutes différentes, car $k_j k'_{j'} = k_l k'_{l'}$ entraîne $k_j^{-1} k_l = k'_{j'} k'^{-1}_{l'} = 1$, puisque K et K′ n'ont d'autre substitution commune que l'unité, et l'on ne peut avoir $k_j k'_{j'} = k_l k'_{l'}$ que si $k_j = k_l$, $k'_{j'} = k'_{l'}$, ou $j = l$, $j' = l'$.

Dès lors, les substitutions différentes de la forme $k_j k'_{j'}$ sont en nombre $\mathcal{K}\mathcal{K}' = p^{m+\mu}$; elles sont toutes contenues dans L, et, par suite, il faudra $p^{m+\mu} \leqq p^{\lambda+\mu}$ ou $m \leqq \lambda$ (¹).

Deuxième démonstration. — Il suffit d'appliquer aux groupes F, F′, G, dont le premier contient les deux autres, le théorème de M. Frobenius, et d'établir que $\mathcal{F}'\mathcal{G}$ divise $\mathcal{F}$, d'où l'on conclura que $\mathcal{G}$ divise $\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}'}$ ou $\mathcal{S}$.

Nous allons montrer plus généralement que : *si deux groupes* F′ *et* G, *assujettis à la seule condition de n'avoir deux à deux d'autre substitution semblable que l'unité, sont contenus dans un même troisième* F, on a $\mathcal{F} \equiv 0 \pmod{\mathcal{F}'\mathcal{G}}$.

En effet, d'après la formule (2),

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}'(N_1 + 2N_2 + \ldots + qN_q + \ldots).$$

Ici q divise $\mathcal{G}$, et l'on n'a $N_q \neq 0$ que s'il existe dans F′ un groupe d'ordre $\frac{\mathcal{G}}{q}$ qu'une substitution de F transforme en un groupe de G; F′ et G ne renfermant d'autre substitution semblable que l'unité, on n'aura $N_q \neq 0$ que pour $\frac{\mathcal{G}}{q} = 1$ ou $q = \mathcal{G}$, ce qui donne bien

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}'\mathcal{G}.N_{\mathcal{G}}.$$

(¹) Comparez Cauchy, *Exer. d'Anal. et de Phys. math.*, t. III, p. 248.

THÉORÈME III. — *Tout étant posé comme au théorème II (ou à son corollaire)* (¹), *soient $p_i^{\varphi_i}$ et $p_i^{\chi_i}$ les plus hautes puissances du nombre premier p_i qui divisent respectivement $\mathcal{A}$ et $\frac{\mathcal{A}}{N}$, u_λ étant supposé égal à o $\left(\text{qui divisent respectivement } \mathcal{O} \text{ et } \frac{\mathcal{O}}{N}\right)$. Si $m_i = \gamma_i + \varepsilon_i$, avec $\varepsilon_i \geqq 0$,* G *permute une quelconque des lettres qu'il déplace avec $\lambda_1 p_i^{\varepsilon_i}$ lettres.*

Soit α une quelconque des lettres déplacées par G, τ le nombre des lettres que G substitue à α. On a $\mathcal{G} = \tau\mathcal{H}$, H étant le groupe des substitutions de G qui laissent α immobile.

Soit $p_i^{\psi_i}$ la plus haute puissance de p_i qui divise $\mathcal{H}$; on aura $\psi_i \leqq \chi_i$, puisque H est de degré $< N$. Alors τ sera divisible par $p_i^{m_i-\psi_i} = p_i^{\varepsilon_i+\chi_i-\psi_i}$, et *a fortiori* par $p_i^{\varepsilon_i}$, ce qui permettra de poser

$$\tau = \lambda_1 p_i^{\varepsilon_i}.$$

Remarque. — En faisant varier i, et posant $\varepsilon_i = 0$ quand $m_i < \chi_i$, on voit que τ sera divisible par $p_1^{\varepsilon_1}$, par $p_2^{\varepsilon_2}$, ..., par $p_k^{\varepsilon_k}$, c'est-à-dire que G permutera une quelconque des lettres qu'il déplace avec $\lambda' p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_2} \ldots p_k^{\varepsilon_k}$ lettres.

En particulier, soient $p_1, p_2, \ldots, p_j$ les diviseurs premiers différents de N. On a évidemment

$$N = p_1^{\varphi_1-\chi_1} p_2^{\varphi_2-\chi_2} \ldots p_j^{\varphi_j-\chi_j},$$

et si l'on a

$$m_1 = \varphi_1, \qquad m_2 = \varphi_2, \qquad \ldots, \qquad m_j = \varphi_j,$$

on en conclura

$$\varepsilon_1 = \varphi_1 - \chi_1, \qquad \varepsilon_2 = \varphi_2 - \chi_2, \qquad \ldots, \qquad \varepsilon_j = \varphi_j - \chi_j,$$

et $\lambda' p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_2} \ldots p_k^{\varepsilon_k}$ sera divisible par N, c'est-à-dire égal à N, en sorte que G sera transitif.

Corollaire. — $p_1, p_2, \ldots, p_j$ étant les diviseurs premiers différents de N, si $p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_j^{m_j}$ sont à la fois les plus hautes puissances des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_j$ qui divisent $\mathcal{G}$ et $\mathcal{O}$, le groupe G est transitif.

(¹) Nous indiquons entre parenthèses les modifications à faire subir à l'énoncé du théorème quand on veut appliquer non le théorème II, mais son corollaire : les démonstrations sont d'ailleurs analogues.

Dans ce cas, si une propriété semblable a lieu pour le groupe H des substitutions de G qui laissent une lettre déterminée immobile, on en conclura que G est deux fois transitif, et ainsi de suite.

Les deux théorèmes précédents et leurs corollaires sont particulièrement susceptibles d'applications quand on veut étudier les propriétés d'un groupe G dont on se donne le degré, la classe et l'ordre; par exemple, quand on voudra étudier les groupes primitifs G d'ordre donné $\mathcal{G}$, de degré N et de classe $N - u_0$ (¹).

II.

Théorème I. — *Soient* G *un groupe de substitutions d'ordre*

$$\mathcal{G} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

$p_1, p_2, \dots, p_k$ *étant des nombres premiers différents,* H *un groupe contenu dans* G, *d'ordre* $\mathfrak{H} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_i^{\beta_i}$ *avec* $i \leqq k$.

Si tous les transformés de H *par les substitutions de* G *ont en commun un même groupe* L *d'ordre* $\mathfrak{L} = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_j^{\gamma_j} > 1$, *les substitutions de* G *sont permutables à un groupe* M, *commun à tous les transformés de* H *par les substitutions de* G, *et qui contient* L.

En effet, soient

$$\text{(11)} \qquad H, \ H_1, \ \dots, \ H_\lambda$$

les divers transformés de H par les substitutions de G. Tout groupe H_ρ de la suite (11) est transformé par une substitution quelconque de G en un groupe H_σ de la même suite. Considérons un groupe I, contenant L, et formé de l'ensemble des substitutions communes à tous les groupes (11). Pour établir le théorème, il suffira de montrer que I est permutable aux substitutions de G, car on pourra prendre alors $M = I$.

Supposons que I ne soit pas permutable aux substitutions de G. On pourra trouver dans G une substitution g telle que $I' = g^{-1} I g$ soit différent de I. Le groupe I′ est commun à tous les groupes de la suite

$$\text{(12)} \qquad g^{-1} H g, \ g^{-1} H_1 g, \ \dots, \ g^{-1} H_\lambda g,$$

(¹) *Voir* notre *Thèse de Doctorat,* 2ᵉ Partie, p. 49-104, au sujet des groupes transitifs de degré N et de classe N — 1, N — 2 ou N — 3.

puisque I est commun à tous les groupes (11). Mais la suite (11) contenant le transformé H_σ d'un quelconque H_ρ des groupes qu'elle renferme par une substitution quelconque de G, les groupes (12) coïncident, à l'ordre près, avec les groupes (11), en sorte que I' est commun à tous les groupes (11). On en conclurait que le groupe (I, I'), dérivé de I et de I', contient I, est $>$ I, et est commun à tous les groupes (11), en sorte que I ne contiendrait pas toutes les substitutions communes à tous les groupes (11), contrairement à l'hypothèse faite sur I.

Donc I est permutable aux substitutions de G.

THÉORÈME II. — *Tout étant posé comme à l'énoncé du théorème précédent, et* M *contenant* L, *et étant permutable aux substitutions de* G *et commun à tous les transformés de* H *par les substitutions de* G, *si* L *est permutable aux substitutions de* M, *les substitutions de* G *sont permutables à un groupe* M', *commun à tous les transformés de* H *par les substitutions de* G, *qui contient* L, *et qui est d'ordre* $\mathfrak{M}' = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_j^{\lambda_j}$ *et contenu dans* M.

En effet, soit J un groupe d'ordre $\mathfrak{J} = p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_2} \ldots p_j^{\varepsilon_j}$ contenu dans M, contenant L, permutable aux substitutions de M, et maximum parmi les groupes de M qui jouissent des mêmes propriétés et qui, en particulier, n'ont pas leur ordre divisible par d'autres nombres premiers que les diviseurs premiers $p_1, p_2, \ldots, p_j$ de $\mathfrak{L}$. Pour établir le théorème, il suffira de montrer que J est permutable aux substitutions de G, car on pourra prendre alors M' = J.

Supposons que J ne soit pas permutable aux substitutions de G : on pourra trouver dans G une substitution g telle que $J' = g^{-1} J g$ soit différent de J. Le groupe J' est contenu dans $g^{-1} M g = M$ et permutable à ses substitutions, en sorte que le groupe (J, J'), dérivé de J et de J', est contenu dans M, comme J et J', permutable aux substitutions de M, et contient L. Le groupe J étant permutable aux substitutions de M l'est à celles de J'; on voit donc facilement que J et J' sont échangeables ([1]), et que l'ordre de (J, J') est $\frac{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}{\mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{J}^2}{\mathfrak{R}} > \mathfrak{J}$, $\mathfrak{R}$ étant l'ordre du groupe R commun à J et à J' ([2]). Ainsi, (J, J') jouirait des mêmes propriétés que J, contiendrait J, et serait

---

([1]) SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, p. 283.
([2]) *Voir* notre *Thèse de Doctorat*, p. 104.

$> J$, contrairement à l'hypothèse faite sur J $\left(\frac{\mathfrak{I}^2}{\mathfrak{R}}\right.$ n'ayant d'autres facteurs premiers que ceux de $\left.\mathfrak{I}\right)$.

Donc J est permutable aux substitutions de G.

Théorème III. — *Tout étant posé comme à l'énoncé du théorème I, et* M′ *étant un groupe commun aux transformés de* H *par les substitutions de* G, *contenant* L, *étant permutable aux substitutions de* G *et son ordre n'étant divisible par aucun facteur premier ne divisant pas* $\mathfrak{L}$, *si* L *est formé de substitutions échangeables à celles de* M′, *les substitutions de* G *sont permutables à un groupe* M″ *contenu dans* M′, *contenant* L, *et formé de substitutions échangeables.*

Nous supposons que M′ est permutable aux substitutions de G. De plus, L étant contenu dans M′ est formé de substitutions échangeables.

Nous considérons un groupe J_1, d'ordre $\mathfrak{I}_1 = p_1^{\eta_1} p_2^{\eta_2} \dots p_j^{\eta_j}$ contenant L, contenu dans M′, formé de substitutions échangeables à celles de M′, et maximum parmi les groupes qui jouissent des mêmes propriétés. Nous remarquerons que J_1 est formé de substitutions échangeables, et que, pour établir le théorème, il suffit de montrer que J_1 est permutable aux substitutions de G, car on pourra prendre alors $M'' = J_1$.

En raisonnant comme au théorème précédent, on voit que, si J_1 n'était pas permutable aux substitutions de G, on serait conduit à une contradiction.

Remarque I. — Soit L_1 un groupe quelconque contenu dans L; on peut tenter d'opérer sur L_1 comme on l'a fait sur L.

Dans le cas du théorème I, L_1 jouit des mêmes propriétés que L, et, par suite, ce théorème lui est applicable.

Dans le cas du théorème II, si L_1 est permutable aux substitutions de M, ou d'un groupe analogue qui le contienne, on peut lui appliquer le théorème II.

Dans le cas du théorème III, L_1 est permutable aux substitutions de M′; d'après le théorème II, on pourra trouver M'_1 contenant L_1, contenu dans M′, permutable aux substitutions de G et dont l'ordre n'ait d'autres diviseurs premiers que ceux de L_1. Mais les substitutions de L_1 sont échangeables à celles de M′, par suite à celles de M'_1; on pourra donc appliquer L_1 et à M'_1 le théorème III, et trouver un groupe M''_1 permutable aux sub-

stitutions de G, contenant L_1, contenu dans M'_1 et formé de substitutions échangeables. En particulier, si $\mathfrak{L}_1 = p_1^{\nu}$, on aura $\mathfrak{M}''_1 = p_1^{0_1}$.

Remarque II. — Dans la démonstration du théorème précédent, on peut imposer à J_1, par suite à M'', certaines conditions plus restrictives, pourvu au moins que ces conditions soient remplies par L. Ainsi on pourra supposer que J_1, en outre des propriétés qu'on lui a attribuées, soit encore tel qu'il ne contienne que des substitutions de mêmes ordres que celles de L, à condition que J_1 soit toujours maximum parmi les groupes de M' jouissant des mêmes propriétés.

En appliquant le théorème III ainsi modifié au groupe L_1 considéré dans la remarque précédente, on voit que le groupe M''_1 ne contiendra que des substitutions de mêmes ordres que celles de L_1. Si en particulier L_1 ne contient que des substitutions d'ordre p_1, il en sera de même de M''_1. On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Tout étant posé comme à l'énoncé du théorème précédent et p_1 étant un diviseur premier quelconque de l'ordre $\mathfrak{L}$ de* L, *on aura dans* M' *un groupe* M''', *d'ordre* $\mathfrak{M}''' = p_1^{0_1}$, *formé de substitutions d'ordre p_1 échangeables, et permutable aux substitutions de* G.

Les théorèmes précédents donnent lieu à un certain nombre de corollaires.

Corollaire I. — Quand un groupe G est primitif, les divers transformés d'un groupe H de G par les substitutions de G auront en commun un groupe transitif, ou n'auront d'autre substitution commune que l'unité.

En effet, si ces divers transformés de H ont en commun quelque substitution autre que l'unité, ils ont en commun un groupe M permutable aux substitutions de G, d'après le théorème I, et M doit être transitif, puisque G est primitif [1].

Corollaire II. — Quand un groupe G est primitif, si le groupe M_1 des substitutions communes aux divers transformés d'un groupe H de G par les substitutions de G contient une substitution échangeable à celles de M_1, et d'ordre premier p, G contient un groupe d'ordre p^0 formé de toutes les substitutions de la forme

$$(13) \qquad |x_1, x_2, \ldots, x_\theta, \quad x_1+\lambda_1, x_2+\lambda_2, \ldots, x_\theta+\lambda_\theta| \qquad (\text{mod } p)$$

---

[1] JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 41.

permutable à ses substitutions, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\theta$ pouvant prendre chacun toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1 \pmod p$).

Par suite G est linéaire et de degré p^θ.

En effet, désignant par L_1 le groupe formé des puissances de la substitution de M_1 échangeable aux substitutions de M_1, on peut appliquer à L_1 les théorèmes I et II, puis à L_1 et au groupe M'_1 obtenu, analogue à M', le théorème III, les remarques précédentes et le théorème IV. On voit ainsi que les substitutions de G sont permutables à un groupe M'', d'ordre $\mathfrak{M}''' = p^\theta$, formé de substitutions d'ordre p échangeables. Enfin, d'après le corollaire précédent, M''' est transitif.

Ceci posé, si une substitution de M''' différente de l'unité laissait quelque lettre immobile, en la transformant par les substitutions du groupe transitif M''' qui lui sont échangeables, on voit qu'elle doit laisser toutes les lettres immobiles, c'est-à-dire se réduire à l'unité. Donc M'' est transitif entre les lettres de G et d'ordre égal à son degré; le degré de G est donc p^θ.

Il ne reste plus qu'à faire voir que les substitutions de M''' sont de la forme indiquée. Or M. Jordan a montré ([1]) qu'un groupe transitif dont l'ordre et le degré sont égaux à p^θ et formé de substitutions d'ordre p échangeables était constitué, en choisissant convenablement la notation, de l'ensemble des substitutions de la forme indiquée (13); il en résulte immédiatement que G est un groupe linéaire.

Corollaire III. — Si p^m est la plus haute puissance du nombre premier p qui divise l'ordre $\mathcal{G}$ d'un groupe G, et si tous les groupes d'ordre p^m de G ont en commun un groupe L d'ordre $\mathfrak{L} = p^\gamma > 1$, les substitutions de G sont permutables à un groupe M''' d'ordre $p^\theta > 1$, commun à tous les groupes de G d'ordre p^m, et qui est formé de substitutions échangeables et d'ordre p.

Si G est de plus primitif, il est linéaire et de degré p^θ.

En effet, d'après un théorème de M. Sylow déjà employé [formule (1)], les divers groupes d'ordre p^m de G sont les transformés d'un d'entre eux H par les substitutions de G. Ces groupes ont d'ailleurs en commun le groupe L d'ordre > 1, et, d'après le théorème I et sa démonstration, le groupe M, formé de l'ensemble des substitutions communes aux transformés de H par les substitutions de G, est permutable aux substitutions de G; le groupe M

([1]) *Traité des substitutions*, p. 291.

est d'ailleurs d'ordre $\mathfrak{M} = p^n$, puisqu'il est contenu dans H d'ordre $\mathfrak{H} = p^m$.

Mais M. Sylow a montré [1] qu'un groupe M d'ordre p^n, p étant premier, renfermait toujours une substitution d'ordre p échangeable à toutes ses substitutions. On peut immédiatement appliquer le corollaire précédent, ce qui démontre la propriété, quand G est primitif.

Quand G n'est pas primitif, soit L_1 le groupe formé des puissances de la substitution échangeables à celles de M; on remarquera que $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{M}$ ont le même diviseur premier unique p, et, par suite, qu'on peut appliquer à M et L_1 les théorèmes III et IV.

Théorème V. — *Soient* G *et* G′ *deux groupes de substitutions; si* G *est permutable aux substitutions de* G′, *et* G′ *à celles de* G; *si de plus* H *est le groupe des substitutions communes à* G *et* G′, *et si* S *et* S′ *sont deux substitutions quelconques de* G *et* G′ *respectivement, on aura*

$$SS' = S'Sh,$$

h *étant une substitution de* H.

Bien que ce théorème soit contenu plus ou moins implicitement dans des démonstrations connues [2], nous croyons devoir l'énoncer, parce qu'il permet d'alléger certains raisonnements.

Considérons $S^{-1}S'^{-1}SS'$; par hypothèse, $S^{-1}S'S = S'_1$ fait partie de G′, et $S'^{-1}SS' = S_1$ fait partie de G. Donc

$$S^{-1}S'^{-1}SS' = S_1'^{-1}S' = S^{-1}S_1$$

fait partie de G′ et de G, par suite de H, et l'on peut écrire

$$S^{-1}S'^{-1}SS' = h,$$

h faisant partie de H, ce qui donne bien

$$SS' = S'Sh.$$

Corollaire. — Si G et G′ n'ont d'autre substitution commune que l'unité, on aura $S'S = SS'$, c'est-à-dire que les substitutions de G seront échangeables à celles de G′ et réciproquement.

---

[1] Mémoire déjà cité, p. 587.

[2] Jordan. *Traité des substitutions*, t. IV, Chap. I.

Théorème VI. — *Soit p^m la plus haute puissance du nombre premier p qui divise l'ordre $\mathfrak{g}$ d'un groupe* G, $\mathfrak{h} = p^m\nu$ *l'ordre du groupe* H *des substitutions de* G *permutables à un groupe* L *d'ordre* $\mathfrak{l} = p^m$ *contenu dans* G. *Un groupe* J, *dérivé de* H *et de son transformé* $g^{-1}Hg$ *par une substitution* g *de* G *contient* g, *et, par suite, l'ordre* $\mathfrak{z}$ *de* J *est divisible par l'ordre de* g.

En effet, J contient le groupe $J' = (H, g^{-1}Lg)$ dérivé de H et du transformé $g^{-1}Lg$ de L par g, puisque H contient L et que $g^{-1}Hg$ contient $g^{-1}Lg$. Il nous suffira donc de montrer que J' contient g.

Soient

$$1 = h_1, \quad h_2, \quad \ldots, \quad h_{\mathfrak{h}} \tag{14}$$

les substitutions de H. Les substitutions de G qui transforment L en $g^{-1}Lg$ sont les substitutions

$$g = h_1 g, \quad h_2 g, \quad \ldots, \quad h_{\mathfrak{h}} g. \tag{15}$$

Le groupe J' est contenu dans G; p^m est la plus haute puissance du nombre premier p qui divise $\mathfrak{z}'$: donc, d'après un théorème de M. Sylow déjà employé [formule (1)], J' contient une substitution σ qui transforme L en $g^{-1}Lg$, puisque L d'ordre p^m et $g^{-1}Lg$ sont contenus dans J'; mais ces deux groupes sont aussi contenus dans G, et, par suite, σ sera une des substitutions (15); J' contiendra une substitution de la forme $h_i g$, et, comme il contient H, il contiendra toutes les substitutions de la forme $h_j^{-1} h_i g$, c'est-à-dire les substitutions (15) et en particulier g.

Théorème VII. — *Soient* G *un groupe transitif,* H_α *le groupe des substitutions de* G *qui laissent une lettre* α *immobile,* H'_α *le groupe dérivé de toutes les substitutions (ou de tous les groupes) de* H_α *qui sont semblables à une ou plusieurs des substitutions (à un ou plusieurs des groupes) de* H_α, *qu'on choisira arbitrairement.*

Si N *est le degré de* G, d *celui de* H'_α, G *admet une répartition de ses lettres en systèmes de non-primitivité* $N-d$ *à* $N-d$, *et contient un groupe d'ordre* $(N-d)\mathfrak{h}_\alpha$, *contenant* H_α, *en sorte que* G *n'est pas primitif si* $N - d > 1$.

En effet, d'après sa définition, H'_α est permutable aux substitutions de H_α.

Soit β une lettre de G différente de α; on peut toujours trouver dans G, qui est transitif, une substitution de la forme

(16) $$\sigma = (\alpha\beta\ldots)\ldots.$$

Le transformé $\sigma^{-1}H_\alpha\sigma = H_\beta$ de H_α par σ contient $\sigma^{-1}H'_\alpha\sigma = H'_\beta$ et H'_β est dérivé de l'ensemble des substitutions (ou groupes) de H_β semblables aux substitutions choisies (ou aux groupes choisis). Dès lors, une autre substitution σ' de G, de la forme (16), donnera

$$\sigma'^{-1}H_\alpha\sigma' = H_\beta = \sigma^{-1}H_\alpha\sigma,$$
$$\sigma'^{-1}H'_\alpha\sigma' = H'_\beta = \sigma^{-1}H'_\alpha\sigma.$$

Donc aux N transformés

(17) $$H_\alpha,\quad H_\beta,\quad \ldots$$

de H_α par les substitutions de G correspondront les N transformés

(18) $$H'_\alpha,\quad H'_\beta,\quad \ldots$$

de H'_α par les substitutions de G.

H_α est de degré d; il laisse, par suite, $N-d$ lettres immobiles, et est dès lors contenu dans $N-d$ et $N-d$ seulement des groupes (17). D'ailleurs, si H'_α est contenu dans H_β par exemple, il devra, d'après sa définition, être identique à H'_β, et réciproquement. H'_α étant contenu dans $N-d$ des groupes (17) exactement, sera identique à $N-d$ des groupes (18) exactement. Ces derniers étant les transformés d'un d'entre eux par les substitutions de G seront identiques $N-d$ à $N-d$ exactement, et le nombre des groupes distincts de la suite (18) sera $\frac{N}{N-d}$.

Mais, si $\mathfrak{z}_\alpha\nu$ est l'ordre du groupe des substitutions de G permutables à H'_α par exemple, le nombre des transformés distincts de H'_α par les substitutions de G est

$$\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{z}_\alpha\nu} = \frac{N}{\nu}.$$

Par suite

$$\frac{N}{\nu} = \frac{N}{N-d} \qquad \text{et} \qquad \nu = N-d.$$

G contient donc un groupe d'ordre $\mathfrak{z}_\alpha(N-d)$ contenant H_α; d'après un

théorème de M. Walther Dyck [1], G admet une répartition de ses lettres en systèmes de non-primitivité $N-d$ à $N-d$, et G ne peut être primitif que si $N-d=1$.

Remarque. — Bien que ce théorème ait été établi par M. Jordan [2], par des procédés analogues, nous avons cru devoir le donner : il contient, en effet, comme cas particuliers, d'autres théorèmes.

Si l'on choisit, par exemple, $H'_\alpha = H_\alpha$, on retrouve un théorème mentionné par M. Rudio [3]. Si l'on suppose *a priori* G primitif, on retrouve un théorème de M. Netto [4].

Corollaire. — Si p est un nombre premier qui divise l'ordre $\mathcal{G}$ de G, et si N est le degré de G, le groupe H′ dérivé de toutes les substitutions d'ordre p contenues dans G, semblables, et qui laissent une lettre donnée immobile, ne peut être de degré $N-d$ que si G admet une répartition de ses lettres en systèmes de non-primitivité $N-d$ à $N-d$.

G ne peut être primitif que si le groupe H′ est de degré $N-1$.

Théorème VIII. — *Soient* G *un groupe quelconque de degré* N, p^m *la plus haute puissance du nombre premier* p *qui divise* $\mathcal{G}$, A *un groupe d'ordre* p^m *contenu dans* G *et de degré* $N-d (d>0)$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d$ *les lettres de* G *que* A *ne déplace pas,* H_{β_1} *le groupe des substitutions de* G *qui laissent* β_1 *immobile,* $\nu'\mathcal{A}$ *l'ordre du groupe des substitutions de* H_{β_1} *permutables à* A, ν'' *le nombre des lettres* $\beta_i (i \leqq d)$ *que* G *substitue à* β_1, $\nu\mathcal{A}$ *l'ordre du groupe des substitutions de* G *permutables à* A; *on a l'égalité*

$$\nu = \nu'\nu''.$$

La démonstration repose essentiellement sur un théorème de M. Sylow déjà employé [formule (1)], d'après lequel tout groupe d'ordre p^m contenu dans G est un transformé de A par une substitution de G.

Soit $\sigma = (\beta_1 \beta_i \ldots)\ldots$ une substitution de G qui remplace β_1 par une des d lettres

$$(19) \qquad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_d.$$

---

(1) *Gruppentheoretische Studien* (*Math. Annalen*, t. XXII, p. 94). *Voir* aussi notre *Thèse de Doctorat*, p. 13.

(2) *Traité des substitutions*, p. 283-285.

(3) *Ueber primitive Gruppen* (*Journal für Mathematik*, t. CII, p. 1-8).

(4) *Untersuchungen aus der Theorie der Substitutionen Gruppen* (*Journal für Mathematik*, t. CIII, p. 333).

Le transformé $\sigma^{-1} H_{\beta_1} \sigma$ de H_{β_1} par σ est formé de l'ensemble des substitutions de G qui laissent β_i immobile, et, par suite, coïncide avec H_{β_1} et H_{β_1} contient A.

Au contraire, une substitution τ qui remplace β_1 par une lettre γ qui ne fait pas partie de (19) transforme H_{β_1} en H_γ, qui laisse γ immobile, et, par suite, ne contient pas A.

Dès lors, si G substitue x lettres à β_1, dont ν'' lettres β_i appartenant à (19), parmi les x groupes

$$(20) \qquad H_{\beta_1}, \quad \ldots, \quad H_{\beta_i}, \quad \ldots, \quad H_\gamma, \quad \ldots,$$

il y en a exactement ν'' qui contiennent A.

Supposons que parmi les groupes (20) il y en ait λ identiques à H_{β_1}. Les x transformés (20) de H_{β_1} par les substitutions de G sont identiques λ à λ; il n'y en a que μ distincts si $x = \lambda\mu$, et dès lors $\mathcal{G} = x\mathfrak{H}_{\beta_1} = \lambda\mu\mathfrak{H}_{\beta_1}$.

Deux des groupes (20) ne peuvent être identiques que si tous deux contiennent A ou si aucun des deux ne le contient. Les ν'' groupes (20) qui contiennent A sont donc identiques λ à λ, et il y a exactement $\frac{\nu''}{\lambda}$ transformés distincts de H_{β_1} par G qui contiennent A.

Les groupes (20) étant transformés les uns dans les autres par les substitutions de G, tout transformé de A par G est de même contenu dans $\frac{\nu''}{\lambda}$ transformés distincts de H_{β_1} par G exactement.

D'autre part, H_{β_1} contient exactement $\frac{\mathfrak{H}_{\beta_1}}{\nu'\mathcal{A}}$ transformés distincts de A par les substitutions de H_{β_1}; tout autre transformé de A distinct des précédents par une substitution de G ne peut faire partie de H_{β_1}, car tous les groupes semblables à A contenus dans H_{β_1} sont les transformés de A par les substitutions de H_{β_1}, puisque p^m est la plus haute puissance du nombre premier p qui divise $\mathfrak{H}_{\beta_1}$, à cause de l'hypothèse $d > 0$.

Il en sera de même pour chacun des transformés distincts de H_{β_1} par G, en nombre μ. Le nombre des transformés distincts de A par les substitutions de G sera alors $\frac{\mu\mathfrak{H}_{\beta_1}}{\rho\nu'\mathcal{A}}$, ρ désignant le nombre des transformés distincts de H_{β_1} par G qui contiennent simultanément, soit le groupe A, soit un de ses transformés par G, ce nombre ρ étant évidemment le même pour tous.

Mais le nombre des transformés distincts de A par les substitutions de G

est aussi $\frac{\mathcal{G}}{\nu\mathcal{A}}$. On en conclut

$$\frac{\mathcal{G}}{\nu\mathcal{A}} = \frac{\mu\mathcal{H}\beta_1}{\rho\nu'\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{G}}{\rho\lambda\nu'\mathcal{A}} \qquad \text{ou} \qquad \nu = \rho\lambda\nu'.$$

On a vu que $\rho = \frac{\nu''}{\lambda}$; on a donc bien $\nu = \nu'\nu''$.

Corollaire. — Si N est le degré de G, $N - d$ le degré d'un groupe A d'ordre p^m contenu dans G, et si $d > 0$, dans la formule (1) de M. Sylow, ν ne peut être égal à l'unité que si chacune des lettres laissées immobiles par A est permutée par G avec des lettres déplacées par A exclusivement.

Si G est transitif, ν ne peut être égal à l'unité que si $d = 1$; sinon ν est un multiple de d.

Ce corollaire est applicable pour toute valeur de p qui ne divise pas N, car on voit facilement que A ne peut être de degré N, que si N est divisible par p.

(*A suivre.*)

SUR LA

DÉFORMATION INFINITÉSIMALE DES SURFACES,

PAR M. E. GENTY,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées à Oran.

1. Soient x, y et z les coordonnées d'un point A d'une surface (A); les expressions

$$(1)\quad \begin{cases} x' = x + \varepsilon\xi, \\ y' = y + \varepsilon\eta, \\ z' = z + \varepsilon\zeta, \end{cases}$$

où ε est une constante infiniment petite, seront les coordonnées d'un point A′ d'une surface (A′) infiniment voisine de la surface (A) et applicable sur elle, sous la condition

$$(2)\quad \Sigma\, dx\, d\xi = 0,$$

ce qui montre que ξ, η et ζ sont les coordonnées d'un point P d'une surface (P) correspondant à (A) par orthogonalité des éléments.

2. La condition (2) étant vérifiée, on pourra poser

$$(3)\quad \begin{cases} d\xi = z_1\, dy - y_1\, dz, \\ d\eta = x_1\, dz - z_1\, dx, \\ d\zeta = y_1\, dx - x_1\, dy, \end{cases}$$

x_1, y_1 et z_1 étant des fonctions des paramètres u et v auxquels on rapporte la surface (A).

Aussi, à tout système de fonctions x_1, y_1 et z_1, telles que les seconds membres des équations (3) soient des différentielles exactes, correspond une déformation infinitésimale de la surface (A). Si nous désignons par (A_1) la surface lieu du point A_1 qui a pour coordonnées x_1, y_1 et z_1, nous dirons que (A_1) est la *surface caractéristique* de cette déformation.

3. Les conditions d'intégrabilité des équations (3) sont :

$$(4)\quad [illegible]$$

Elles sont évidemment satisfaites si l'on suppose que x_1, y_1 et z_1 soient des constantes. La surface (A_1) est alors un point fixe A_1, et l'on a

$$\xi \quad [illegible] = -a,$$
$$\eta \quad [illegible] = -b,$$
$$\zeta \quad [illegible] = -c,$$

a, b et c étant des constantes.

On voit que, dans ce cas, la déformation de la surface (A) consiste dans une simple rotation autour de OA_1 suivie d'une translation. En d'autres termes, la surface est simplement déplacée, mais non déformée.

La proposition réciproque est évidente : il en résulte qu'à toute surface (A_1) correspond une déformation effective de (A).

4. Soient λ, μ et ν les cosinus directeurs de la normale au point A de (A). Si nous ajoutons les équations (4) après les avoir multipliées respectivement par $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$ et $\frac{dz}{du}$, puis par $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{dv}$ et $\frac{dz}{dv}$, puis enfin par λ, μ et ν, il vient

$$(5)\qquad \sum \lambda \frac{dx_1}{du} = 0,$$

$$(6)\qquad \sum \lambda \frac{dx_1}{dv} = 0$$

et

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx_1}{dv} & \frac{dy_1}{dv} & \frac{dz_1}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dy_1}{du} & \frac{dz_1}{du} \end{vmatrix}.$$

Des équations (5) et (6), il résulte que les surfaces (A) et (A_1) ont aux points correspondants leurs plans parallèles.

Si enfin nous ajoutons les équations (3), après les avoir multipliées respectivement par x_1, y_1 et z_1, il vient

$$\Sigma x_1 \, d\zeta = 0,$$

ce qui montre que la droite OA_1 est parallèle à la normale au point P de la surface (P) qui correspond à (A) par orthogonalité des éléments.

5. Posons

$$D = \sum \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \quad = - \sum \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$D' = \sum \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} = - \sum \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = - \sum \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$D'' = \sum \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \quad = - \sum \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} \text{ (1)}$$

$$h = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} & \frac{\partial \mu}{\partial u} & \frac{\partial \nu}{\partial u} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} & \frac{\partial \mu}{\partial v} & \frac{\partial \nu}{\partial v} \end{vmatrix} = \sqrt{eg - f^2},$$

e, f et g étant les coefficients de l'élément linéaire de la représentation sphérique de la surface (A).

A l'aide de ces notations, on obtient sans peine les relations suivantes

$$h\left(\mu \frac{\partial z}{\partial u} - \nu \frac{\partial y}{\partial u}\right) = D' \frac{\partial \lambda}{\partial u} - D \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

$$h\left(\mu \frac{\partial z}{\partial v} - \nu \frac{\partial y}{\partial v}\right) = D'' \frac{\partial \lambda}{\partial u} - D' \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

et celles analogues obtenues en permutant x, y et z, λ, μ et ν.

En tenant compte de ces relations, l'équation (7) peut se mettre sous la forme

$$(8) \qquad D \sum \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} - 2D' \sum \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + D'' \sum \frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0.$$

Soient u et v les paramètres des lignes asymptotiques de la surface (A).

---

(1) D, D' et D'' sont identiques, à un facteur près, aux fonctions que Gauss a désignées par les mêmes lettres.

On aura

$$D = 0 \quad \text{et} \quad D'' = 0;$$

$$\frac{\nu \frac{\partial \mu}{\partial v} - \mu \frac{\partial \nu}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial v}} = \frac{\lambda \frac{\partial \nu}{\partial v} - \nu \frac{\partial \lambda}{\partial v}}{\frac{\partial y}{\partial v}} = \frac{\mu \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda \frac{\partial \mu}{\partial v}}{\frac{\partial z}{\partial v}},$$

$$\frac{\mu \frac{\partial \nu}{\partial u} - \nu \frac{\partial \mu}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{\nu \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \lambda \frac{\partial \nu}{\partial u}}{\frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{\lambda \frac{\partial \mu}{\partial u} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial u}}{\frac{\partial z}{\partial u}}.$$

L'équation (8) donnera alors

$$\sum \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} = \sum \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0,$$

d'où

$$\frac{\frac{\partial x_1}{du}}{\nu \frac{\partial \mu}{\partial v} - \mu \frac{\partial \nu}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial u}}{\lambda \frac{\partial \nu}{\partial v} - \nu \frac{\partial \lambda}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial u}}{\mu \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda \frac{\partial \mu}{\partial v}},$$

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial v}}{\mu \frac{\partial \nu}{\partial u} - \nu \frac{\partial \mu}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial v}}{\nu \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \lambda \frac{\partial \nu}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial v}}{\lambda \frac{\partial \mu}{\partial u} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial u}},$$

et l'on aura enfin

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial v}}{\frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial v}}{\frac{\partial z}{\partial u}},$$

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial u}}{\frac{\partial y}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial u}}{\frac{\partial z}{\partial v}}.$$

M. Bianchi dit que deux surfaces sont *associées* lorsqu'elles se correspondent point par point avec parallélisme des plans tangents, de telle sorte qu'aux asymptotiques de la première correspond sur la seconde un réseau conjugué. On reconnaît alors très simplement :

1° Qu'aux asymptotiques de la seconde correspond sur la première un réseau conjugué;

2° Que les asymptotiques d'une des surfaces et les courbes qui leur correspondent sur la surface associée ont aux points correspondants des tangentes parallèles.

Les résultats que nous venons d'obtenir montrent que *les surfaces* (A) *et* (A_1) *sont associées*.

Si la surface (A) est une sphère, la surface associée (A_1) est une surface minima.

5. Les équations (5), (6) et (8) conduisent très simplement à l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre dont dépend le problème de la déformation infinitésimale des surfaces.

Posons, en effet,

$$\Sigma\lambda x_1 = p, \tag{9}$$

on aura, en tenant compte des équations (5) et (6),

$$\sum x_1 \frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial u}, \qquad \sum x_1 \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial v}. \tag{10}$$

Si, d'ailleurs, on pose

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2} = \alpha\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \alpha_1\frac{\partial\lambda}{\partial v} - e\lambda,$$
$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = \beta\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \beta_1\frac{\partial\lambda}{\partial v} - f\lambda,$$
$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial v^2} = \gamma\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \gamma_1\frac{\partial\lambda}{\partial v} - g\lambda\ (^1),$$

avec les équations analogues obtenues en remplaçant λ soit par μ, soit

(1) α, α_1, β, β_1, γ et γ_1 sont les symboles de M. Cristoffel, dérivés de l'élément linéaire de la représentation sphérique de (A). (*Voir* le § 3 du Mémoire de M. Cosserat *Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces*). On a d'ailleurs

$$h\alpha = \begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial v} & \frac{\partial\mu}{\partial v} & \frac{\partial\nu}{\partial v} \\ \lambda & \mu & \nu \\ \frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\mu}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\nu}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \qquad h\alpha_1 = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \frac{\partial\lambda}{\partial u} & \frac{\partial\mu}{\partial u} & \frac{\partial\nu}{\partial u} \\ \frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\mu}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\nu}{\partial u^2} \end{vmatrix},$$

avec des expressions analogues pour β et β_1, γ et γ_1.

par ν, on aura

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \sum x_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = \mathrm{T},$$

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \sum \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} - \sum x_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{T}',$$

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} - \sum x_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} = \mathrm{T}'',$$

où l'on a posé

$$\mathrm{T} = \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \alpha\frac{\partial p}{\partial u} - \alpha_1\frac{\partial p}{\partial v} + ep,$$

$$\mathrm{T}' = \frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} - \beta\frac{\partial p}{\partial u} - \beta_1\frac{\partial p}{\partial v} + fp,$$

$$\mathrm{T}'' = \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} - \gamma\frac{\partial p}{\partial u} - \gamma_1\frac{\partial p}{\partial v} + gp.$$

L'équation (8) devient alors

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{DT}'' - 2\mathrm{D}'\mathrm{T}' + \mathrm{D}''\mathrm{T} = 0:$$

c'est l'équation cherchée; *elle a pour caractéristiques les asymptotiques de* (A).

A toute solution p de cette équation correspond une surface caractéristique, dont on obtient les coordonnées en résolvant les équations (9) et (10), ce qui donne :

$$x_1 = p\lambda + \frac{\frac{\partial p}{\partial u}\left(\nu\frac{\partial \mu}{\partial v} - \mu\frac{\partial \nu}{\partial v}\right) + \frac{\partial p}{\partial v}\left(\mu\frac{\partial \nu}{\partial u} - \nu\frac{\partial \mu}{\partial u}\right)}{h},$$

avec des expressions analogues pour y_1 et z_1.

Cette surface, qui est évidemment l'enveloppe d'un plan parallèle au plan tangent à (A) en A, mené à une distance p de l'origine, définit une déformation infinitésimale de (A); nous dirons avec M. Bianchi que p est la *fonction caractéristique* de cette déformation.

On peut remarquer que l'équation (11) admet comme solution particulière les cosinus de l'angle que fait la normale à la surface (A) avec une direction fixe quelconque. A cette solution correspond le cas particulier déjà considéré où la surface (A) est simplement déplacée, mais non déformée.

Si, enfin, on rapporte (A) à ses lignes asymptotiques, l'équation (11) se réduit à

$$T = \frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} - \beta \frac{\partial p}{\partial u} - \beta_1 \frac{\partial p}{\partial v} + pf = 0.$$

6. On a, pour les coordonnées de la surface déformée (A') les expressions suivantes :

$$x' = x + \varepsilon\xi,$$
$$y' = y + \varepsilon\eta,$$
$$z' = z + \varepsilon\zeta,$$

d'où

$$dx' = dx + \varepsilon(z_1\, dy - y_1\, dz),$$
$$dy' = dy + \varepsilon(x_1\, dz - z_1\, dx),$$
$$dz' = dz + \varepsilon(y_1\, dx - x_1\, dy).$$

De ces équations, on déduit immédiatement, en négligeant les puissances de ε supérieures à la première,

$$dx = dx' - \varepsilon(z_1\, dy' - y_1\, dz'),$$
$$dy = dy' - \varepsilon(x_1\, dz' - z_1\, dx'),$$
$$dz = dz' - \varepsilon(y_1\, dx' - x_1\, dy').$$

Si nous ajoutons ces équations après les avoir multipliées respectivement par λ, μ et ν, il vient :

$$dx'[\lambda + \varepsilon(\mu z_1 - \nu y_1)] + dy'[\mu + \varepsilon(\nu x_1 - \lambda y_1)] + dz'[\nu + \varepsilon(\lambda y_1 - \mu x_1)] = 0.$$

Si donc on désigne par λ', μ' et ν' les cosinus directeurs de la normale à la surface (A'), on aura

$$\lambda' = \lambda + \varepsilon(\mu z_1 - \nu y_1),$$
$$\mu' = \mu + \varepsilon(\nu x_1 - \lambda z_1),$$
$$\nu' = \nu + \varepsilon(\lambda y_1 - \mu x_1),$$

et, par suite,

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial u} = \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \varepsilon\left(\frac{\partial \mu}{\partial u} z_1 - \frac{\partial \nu}{\partial u} y_1 + \mu \frac{\partial z_1}{\partial u} - \nu \frac{\partial y_1}{\partial u}\right),$$
$$\frac{\partial \lambda'}{\partial v} = \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \varepsilon\left(\frac{\partial \mu}{\partial v} z_1 - \frac{\partial \nu}{\partial v} y_1 + \mu \frac{\partial z_1}{\partial v} - \nu \frac{\partial y_1}{\partial v}\right),$$

avec des expressions analogues pour les dérivées partielles de μ et de ν.

[illegible]

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

[illegible] alors par [illegible] et [illegible] les valeurs des fonctions D, D' et D'' pour la surface donnée, on trouve sans difficulté

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} = D + \frac{2}{h}(D'T - DT'),$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} = D' + \frac{2}{h}(D'T' - D''T) = D' - \frac{2}{h}(DT'' - D'T'),$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} = D'' + \frac{2}{h}(D''T' - D'T'').$$

On a de même, pour la surface (A_1),

$$\Delta = T, \quad \Delta' = T', \quad \Delta'' = -T''.$$

Soient u et v les paramètres du réseau conjugué à (A) et (A'). On aura

$$D' = 0, \quad \Delta' = 0,$$

et, par suite,

$$T = 0, \quad T'' = 0;$$

donc u et v sont les paramètres des lignes asymptotiques des (A_1).

Donc *aux lignes asymptotiques de la surface* (A_1) *correspond sur* (A) *un réseau conjugué qui reste conjugué dans la déformation.*

On peut énoncer aussi la proposition suivante :

Si u et v sont les paramètres d'un réseau conjugué à une surface (A) *et à une surface infiniment voisine* (A') *provenant de la déformation de* (A), *les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre*

$$T = 0, \quad T'' = 0,$$

[illegible] *n'entrent que les éléments linéaires de la représentation* [illegible] *commune.*

Il résulte enfin, de ce qui précède, que le problème de la déformation

infinitésimale d'une surface (A) revient à la détermination des réseaux conjugués, tracés sur cette surface, qui ont une représentation sphérique identique à celle des asymptotiques d'une surface, ou, ce qui revient au même, qui ont leurs invariants égaux.

7. Comme application, nous allons chercher si, parmi les déformations infinitésimales de (A), il y en a une qui conserve les lignes de courbure.

Soient alors u et v les paramètres des lignes de courbure de la surface (A); la représentation sphérique des lignes de courbure devant être identique à celle des asymptotiques d'une surface, on aura, d'après un théorème de M. Dini,

$$\frac{\partial\beta}{\partial u} = \frac{\partial\beta_1}{\partial v},$$

ou

$$\frac{\partial^2 \log e}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 \log g}{\partial u\,\partial v}.$$

Donc, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une déformation infinitésimale conservant les lignes de courbure d'une surface (A) est que l'image sphérique des lignes de courbure de cette surface forme un réseau isotherme.

On peut alors poser

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \rho\,\frac{\partial\lambda}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial u} = \rho\,\frac{\partial\mu}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial u} = \rho\,\frac{\partial\nu}{\partial v},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \sigma\,\frac{\partial\lambda}{\partial u}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial v} = \sigma\,\frac{\partial\mu}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} = \sigma\,\frac{\partial\nu}{\partial u}.$$

Les conditions d'intégrabilité de ces équations sont

$$\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \rho\,\frac{\partial^2\lambda}{\partial v^2} = \frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \sigma\,\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial v} + \rho\,\frac{\partial^2\mu}{\partial v^2} = \frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial u} + \sigma\,\frac{\partial^2\mu}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\nu}{\partial v} + \rho\,\frac{\partial^2\nu}{\partial v^2} = \frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial\nu}{\partial u} + \sigma\,\frac{\partial^2\nu}{\partial u^2}.$$

Nous supposerons d'ailleurs que les paramètres u et v aient été particularisés de telle sorte qu'on ait

$$e = g.$$

[illegible] famille de

[illegible]

[illegible] sa repré-

[illegible] de ces lignes de courbure sera

[illegible]

Supposons qu'on ait

$$\frac{\partial^2 \log D}{\partial u \, \partial v} = \frac{\partial^2 \log D''}{\partial u \, \partial v}$$

ou

$$\text{(12)} \qquad UD'' - VD = 0,$$

U et V étant des fonctions de u et de v; respectivement l'équation des lignes de courbure deviendra

$$U\,du^2 - V\,dv^2 = 0.$$

Si donc on pose

$$\sqrt{U}\,du + \sqrt{V}\,dv = 2\,du_1,$$
$$\sqrt{U}\,du - \sqrt{V}\,dv = 2\,i\,dv_1,$$

u_1 et v_1 seront les paramètres des lignes de courbure de la surface, et l'on aura, pour l'élément linéaire de la représentation sphérique,

$$ds^2 = 2f\,du\,dv = \frac{2f}{\sqrt{UV}}(du_1^2 + dv_1^2);$$

donc u_1 et v_1 sont les paramètres d'un système isotherme de la représentation sphérique.

La réciproque est évidente : si les lignes de courbure d'une surface (A) ont pour image sphérique un réseau isotherme, l'équation (12) sera vérifiée et les lignes de courbure de la surface s'obtiendront par de simples quadratures.

Donc enfin, on peut énoncer la proposition suivante, plus générale que celle qui précède :

Si une surface (A) *admet, pour représentation sphérique de ses lignes de courbure, un réseau isotherme, on pourra obtenir, par de simples quadratures, une déformation infinitésimale de* (A) *conservant les lignes de courbure.*

SUR QUELQUES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

DU SECOND ORDRE,

PAR M. E. VESSIOT,

Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Cette étude est divisée en trois parties. La première est consacrée aux équations du second ordre

$$(1) \qquad x'' = \varphi(x', x, t)$$

dont l'intégrale générale est de la forme

$$x = \frac{c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t)}{c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t) + c_3\psi_3(t)},$$

et que nous appelons, pour abréger, les équations (E). Toute équation (E) est de la forme

$$(2) \qquad A(x'x'' - 2x'^2) + Bx'' + Cxx' + Dx' + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0,$$

les coefficients A, B, C, D, P, Q, R, S étant liés par deux relations différentielles que nous déterminons. L'intégration d'une telle équation se ramène à celle d'une équation linéaire du troisième ordre, car on peut toujours déterminer, sans intégrations, une transformation

$$x = \frac{\alpha(t)y + \beta(t)}{\gamma(t)y + \delta(t)},$$

telle que l'équation en y soit identique à celle dont dépendent les dérivées logarithmiques des intégrales d'une équation linéaire du troisième ordre. Un intérêt particulier s'attache, par suite, parmi les équations (E), aux

équations de la forme

$$(3)\qquad x'' + 3xx' + x^3 + \lambda(t)(x' + x^2) + \mu(t)x + \nu(t) = 0,$$

puisque toute équation (E) se ramène facilement à ce type. Nous montrons comment l'intégration d'une telle équation (3), équivalente, en général, à celle d'une équation linéaire du troisième ordre, se simplifie par la connaissance d'une ou plusieurs intégrales particulières. Ces réductions tiennent au fond à ce que l'équation (3) possède des systèmes fondamentaux d'intégrales, l'intégrale générale s'exprimant, par des formules connues, au moyen de quatre intégrales particulières quelconques.

Dans un second paragraphe, nous considérons les équations générales (2). Elles conservent leur forme par les transformations de variable et de fonction

$$(4)\qquad x = \frac{\alpha(t)\,y + \beta(t)}{\gamma(t)\,y + \delta(t)}, \qquad t = \varphi(u).$$

Nous indiquons sommairement la détermination des invariants des équations (2) pour ces transformations (4), et donnons, comme application, les conditions sous lesquelles l'équation (2) se ramène à une équation

$$x'' + lxx' + mx' + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

à coefficients constants. On sait que ces dernières équations ont été étudiées par M. Picard, et, plus récemment, par M. Mittag-Leffler. La méthode employée est celle dont Laguerre et Halphen se sont servis pour les équations linéaires, et qui a été utilisée notamment, depuis, par M. Appell et M. Painlevé; elle est fondée sur la recherche de formes canoniques pour les équations (2). Nous adoptons, comme forme canonique, dans le cas général, le type

$$x'' + 3xx' + Ix^3 + Jx + K = 0.$$

Mais, dans des cas particuliers, on le remplace par l'un des suivants :

$$x'' + 3xx' + x^3 + Gx^2 + H = 0,$$
$$x'' + Ex^3 + F = 0,$$
$$x'' + x^2 + T = 0.$$

La troisième partie contient la solution du problème suivant :

Reconnaître si une équation du second ordre (1) *peut s'abaisser au*

premier ordre par une transformation définie par une équation de la forme

$$V = F(x', x),$$

et déterminer, dans ce cas, les fonctions F *correspondantes.*

En général, toutes ces fonctions F sont fonctions d'une seule d'entre elles, qu'on obtient sans intégration, ou, si l'équation (1) est de la forme

$$x'' = A(x', x)\theta(t) + B(x', x),$$

par une quadrature. On peut donc dire qu'en général il y a zéro solution, ou une seule solution. Une seule équation fait exception, c'est l'équation

$$x'' = x'\theta(t) + x'^2\xi(x),$$

où θ et ξ sont des fonctions quelconques de leurs arguments. Il y a ici une infinité de solutions distinctes, qui s'obtiennent par des quadratures. Cette équation s'intègre du reste elle-même par quadratures, et l'intégrale générale s'exprime, au moyen d'une intégrale particulière quelconque x_0, par une formule

$$x = \Phi(x_0 \mid a, b),$$

où a, b sont des constantes arbitraires, et où la fonction Φ ne dépend pas du choix de l'intégrale particulière x_0. C'est donc encore une équation à solutions fondamentales.

I. — Recherche et étude des équations (E).

1. Parmi les équations différentielles du second ordre, il est naturel de rechercher, comme étant analogues aux équations de Riccati, celles dont l'intégrale générale est de la forme

$$(1) \qquad x = \frac{c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t)}{c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t) + c_3\psi_3(t)},$$

c_1, c_2, c_3 étant des constantes.

Si l'on suppose donnée cette intégrale (1), on trouve immédiatement pour l'équation cherchée :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x\psi_1 - \varphi_1 & x'\psi_1 + x\psi'_1 - \varphi'_1 & x''\psi_1 + 2x'\psi'_1 + x\psi''_1 - \varphi''_1 \\ x\psi_2 - \varphi_2 & x'\psi_2 + x\psi'_2 - \varphi'_2 & x''\psi_2 + 2x'\psi'_2 + x\psi''_2 - \varphi''_2 \\ x\psi_3 - \varphi_3 & x'\psi_3 + x\psi'_3 - \varphi'_3 & x''\psi_3 + 2x'\psi'_3 + x\psi''_3 - \varphi''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

ce qui donne, en développant, une équation de la forme

$$(3)\qquad A(xx''-2x'^2)+Bx''+Cxx'+Dx'+Px^3+Qx^2+Rx+S=0,$$

où A, B, C, D, P, Q, R, S sont des fonctions de la variable indépendante t.

Mais cette équation dépend de 7 fonctions arbitraires de t, alors que (1) n'en contient que 5. On prévoit donc que l'équation (3), qui comprend évidemment, comme cas particulier, l'équation linéaire du second ordre, avec ou sans second membre, n'aura pour intégrale générale une expression de la forme (1) que si ses coefficients vérifient deux relations. C'est ce que nous établirons en toute rigueur, et nous donnerons, en même temps que ces deux relations, le moyen de ramener la recherche de l'intégrale (1), dans le cas où elle existe, à l'intégration d'une équation linéaire homogène du troisième ordre.

Remarquons auparavant que le problème que nous traitons est un cas particulier d'un problème, plus général, résolu par M. Sophus Lie (¹) :

Trouver toutes les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale est de la forme

$$a\,\varphi(x,t)+b\,\psi(x,t)+\chi(x,t)=0,$$

c'est-à-dire qui se ramènent, par une transformation de points

$$X=\frac{\varphi(x,t)}{\chi(x,t)},\qquad T=\frac{\psi(x,t)}{\chi(x,t)},$$

à la forme $\dfrac{d^2X}{dT^2}=0$.

Il nous paraît cependant intéressant de traiter directement la question que nous nous sommes posée, tant à cause de la simplicité de la méthode qui nous servira, que parce qu'elle nous fournira quelques résultats sur les équations générales de la forme (3).

2. Deux remarques vont nous servir de point de départ. D'abord, à la classe d'équations considérée appartient évidemment l'équation

$$(4)\qquad y''+3yy'+y+\lambda(y'^3+y^2)+\mu y+\nu=0,$$

(¹) *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*; 1883. *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen*, etc., III.

obtenue en posant

(5) $$y = \frac{z'}{z},$$

dans l'équation linéaire du troisième ordre

(6) $$z''' + \lambda z'' + \mu z' + \nu = 0.$$

En second lieu, si l'équation proposée a son intégrale générale de la forme (1), il en est de même de la transformée de cette équation obtenue en posant

(7) $$x = \frac{\alpha(t)y + \beta(t)}{\gamma(t)y + \delta(t)},$$

et réciproquement.

Je dis de plus que, si l'équation (3) a pour intégrale générale (1), on peut disposer de α, β, γ, δ dans la formule (7), de manière que sa transformée en y soit précisément de la forme (4), c'est-à-dire, ait son intégrale générale de la forme

$$y = \frac{c_1\chi'_1(t) + c_2\chi'_2(t) + c_3\chi'_3(t)}{c_1\chi_1(t) + c_2\chi_2(t) + c_3\chi_3(t)}.$$

On a, en effet,

$$y = \frac{\beta - \delta x}{\gamma x - \alpha} = \frac{c_1[\beta\psi_1 - \delta\varphi_1] + c_2[\beta\psi_2 - \delta\varphi_2] + c_3[\beta\psi_3 - \delta\varphi_3]}{c_1[\gamma\varphi_1 - \alpha\psi_1] + c_2[\gamma\varphi_2 - \alpha\psi_2] + c^3[\gamma\varphi_3 - \alpha\psi_3]},$$

et il s'agit de satisfaire aux équations

$$\beta\psi_1 - \delta\varphi_1 = \frac{d}{dt}(\gamma\varphi_1 - \alpha\psi_1),$$

$$\beta\psi_2 - \delta\varphi_2 = \frac{d}{dt}(\gamma\varphi_2 - \alpha\psi_2),$$

$$\beta\psi_3 - \delta\varphi_3 = \frac{d}{dt}(\gamma\varphi_3 - \alpha\psi_3).$$

Elles fourniront des valeurs compatibles pour β et δ, si α et γ vérifient la relation

(8) $$\begin{vmatrix} \psi_1 & \varphi_1 & \gamma\varphi'_1 - \alpha\psi'_1 \\ \psi_2 & \varphi_2 & \gamma\varphi'_2 - \alpha\psi'_2 \\ \psi_3 & \varphi_3 & \gamma\sigma'_3 - \alpha\psi'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Or, cette équation admet toujours pour α, γ une solution (autre que

$\alpha = \gamma = 0$). Les conditions cherchées s'obtiendront donc en exprimant qu'il existe au moins une transformation (7) ramenant l'équation (3) à la forme (4); et, cette transformation une fois connue, l'étude de l'équation donnée est ramenée, comme il a été annoncé, à celle d'une équation linéaire du troisième ordre, l'équation (6). Il résulte de plus, de ce qui précède, que s'il y a une transformation (7) répondant à la question, il y en a une infinité, car α et γ ne sont déterminées qu'à un facteur près $k(t)$.

Mais on peut déterminer ce facteur, en s'imposant la condition

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} z_1'' & z_1' & z_1 \\ z_2'' & z_2' & z_2 \\ z_3'' & z_3' & z_3 \end{vmatrix} = 1,$$

où l'on a posé, pour abréger l'écriture,

$$z_1 = \gamma\varphi_1 - \alpha\psi_1, \qquad z_2 = \gamma\varphi_2 - \alpha\psi_2, \qquad z_3 = \gamma\varphi_3 - \alpha\psi_3.$$

Si l'on suppose en effet déterminé, par l'équation (8), le rapport $\rho = \frac{\gamma}{\alpha}$, on voit facilement que la condition (9) ne contient pas les dérivées de α. Remarquons enfin que la condition (9) équivaut à ce fait que $\lambda = 0$ dans les équations (4) et (6), et nous pourrons énoncer le résultat suivant :

Pour que l'équation (3) *ait une intégrale générale de la forme* (1), *il faut et il suffit qu'il existe une transformation* (7) *qui la ramène à la forme*

$$(10) \qquad y'' + 3yy' + y^3 + Hy + K = 0.$$

Cette transformation, si elle existe, est unique, et une fois qu'elle est connue, en posant

$$(11) \qquad y = \frac{z'}{z},$$

l'équation proposée est ramenée (*sans intégration*) *à l'équation linéaire*

$$(12) \qquad z''' + Hz' + Kz = 0.$$

3. Avant d'appliquer le résultat précédent, nous remarquerons que l'équation (3), la plus générale, possède la propriété de se changer en une équation de même forme, pour tout changement de fonction et de variable

indépendante de la forme

$$x = \frac{\alpha(t)y + \beta(t)}{\gamma(t)y + \delta(t)}, \qquad t = \varphi(u).$$

Pour le montrer, il suffit évidemment de vérifier le fait pour chacune des transformations

(I) $$x = \alpha(t)y,$$

(II) $$x = y + \alpha(t),$$

(III) $$x = \frac{1}{y},$$

(IV) $$t = \varphi(u) \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} = \psi(u),$$

car la transformation précédente est un produit de transformations de ces quatre types. Or, la transformation (I) donne

$$x = \alpha y, \qquad x' = \alpha y' + \alpha' y, \qquad x'' = \alpha y'' + 2\alpha' y' + \alpha y'',$$
$$xx'' - 2x'^2 = \alpha^2(yy'' - 2y'^2) - 2\alpha\alpha' . yy' + (\alpha\alpha'' - 2\alpha'^2)y^2.$$

La transformation (II) donne

$$x = y + \alpha, \qquad x' = y' + \alpha', \qquad x'' = y'' + \alpha'',$$
$$xx'' - 2x'^2 = (yy'' - 2y'^2) + \alpha y'' - 4\alpha' y' + \alpha'' y - 2\alpha'^2.$$

Et la transformation (IV) donne

$$x' = \psi . \frac{dx}{du}, \qquad x'' = \psi^2 . \frac{d^2x}{du^2} + \psi\psi' . \frac{dx}{du},$$
$$xx'' - 2x'^2 = \psi^2\left[x\frac{d^2x}{du^2} - 2\left(\frac{dx}{du}\right)^2\right] + \psi\psi' . x\frac{dx}{du}.$$

Le résultat est donc évident pour ces trois transformations.

Quant à la transformation (III), elle donne

$$x = \frac{1}{y}, \qquad x' = -\frac{y'}{y^2}, \qquad x'' = -\frac{yy'' - 2y'^2}{y^3}, \qquad xx'' - 2x'^2 = -\frac{y''}{y^3},$$

et, par suite, la transformée en y est

$$B(yy'' - 2y'^2) + Ay'' + Dyy' + Cy' - Sy^3 - Ry^2 - Qy - P = 0.$$

On conclut de là bien facilement le moyen de faire disparaître le premier

terme de l'équation (3). Il suffit, par une transformation de la forme (II), de faire disparaître le second terme, et de passer ensuite à l'équation aux inverses. On voit ainsi que la transformation cherchée est

$$x = \frac{A - Bv}{Av}, \tag{13}$$

et l'équation transformée est

$$v'' + lvv' + mv' + pv^3 + qv^2 + rv + s = 0, \tag{14}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} l &= \frac{1}{A^2}[AD - BC + 4(AB' - BA')], \\ m &= \frac{C}{A}, \\ p &= \frac{1}{A^4}[2(AB' - BA')^2 - (BC - AD)(AB' - BA') + PB^3 - QAB^2 + RA^2B - SA^3], \\ q &= \frac{1}{A^3}[A(AB'' - BA'') - (2A' - C)(AB' - BA') - 3PB^2 + 2QAB - RA^2], \\ r &= \frac{1}{A^2}(3PB - QA), \\ s &= -\frac{P}{A}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

On remarquera enfin que, si l'on fait dans l'équation (14) la transformation

$$v = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}, \qquad t = \varphi(u)$$

le terme en $(yy'' - 2y'^2)$ reparaît, à moins que γ ne soit nul.

4. Tout revient donc à chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une transformation

$$v = \alpha(t)y + \beta(t), \tag{16}$$

ramenant l'équation (14) à la forme (10), et à trouver cette transformation, quand elle existe. Il vient

$$v = \alpha y + \beta, \quad v' = \alpha y' + \alpha' y + \beta', \quad vv' = \alpha^2 yy' + \alpha\beta y' + \alpha\alpha' y^2 + (\alpha\beta' + \beta\alpha')y + \beta\beta',$$
$$v'' = \alpha y'' + 2\alpha' y' + \alpha'' y + \beta'',$$

et, par suite, pour l'équation en y,

$$\alpha y'' + l\alpha^2 yy' + (2\alpha' + l\alpha\beta + m\alpha)y' + p\alpha^3 y^3 + (l\alpha\alpha' + 3p\alpha^2\beta + q\alpha^2)y^2 + \ldots = 0.$$

On a donc les conditions

$$\alpha = \frac{1}{3} l\alpha^2 = p\alpha^3,$$

$$l\alpha\beta + m\alpha + 2\alpha' = 0,$$

$$l\alpha\alpha' + 3p\alpha^2\beta + q\alpha^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$l \neq 0, \qquad \alpha = \frac{3}{l}, \qquad 9p - l^2 = 0,$$

$$l\beta + m - 2\frac{l'}{l} = 0,$$

$$3p\beta + q - l' = 0,$$

ou enfin

(17) $$\alpha = \frac{3}{l}, \qquad \beta = 2\frac{l'}{l^2} - \frac{m}{l},$$

avec

(18) $$9p - l^2 = 0, \qquad l' + lm - 3q = 0.$$

Nous avons supprimé la condition $l \neq 0$, car, si $l = 0$, les deux conditions (18) deviennent $p = q = 0$, et l'équation (14) est linéaire, de sorte que l'équation proposée a bien, dans ce cas, son intégrale générale de la forme (1).

Les conditions (18) sont donc les conditions cherchées, et, si elles sont remplies, les formules (17), jointes aux formules (16), (13) et (15), donnent la transformation qui ramène l'équation (3) à la forme (10), c'est-à-dire à l'équation linéaire (12). Le résultat annoncé est donc établi.

Il est naturel de chercher à exprimer, au moyen des coefficients de l'équation (3), les conditions (18). On trouve sans difficulté

$$L = A^4(9p - l^2) = 2(AB' - BA')^2 + (AD - BC)(AB' - BA') - (AD - BC)^2 + 9(PB^3 - QAB^2 + RA^2B - SA^3),$$

$$M = A^3(l' + lm - 3q) = A(AB'' - BA'') - 2A'(AB' - BA') + A(AD' - DA') + B(CA' - AC') + C(AD - BC) + 9PB^2 - 6QAB + 3RA^2,$$

et il est naturel d'introduire, pour la symétrie,

$$N = B(AB'' - BA'') - 2B'(AB' - BA') - B(BC' - CB') - A(DB' - BD') + D(AD - BC) + 3QB^2 - 6RAB + 9SA^2.$$

Si l'on remarque l'identité

$$L = MB - AN,$$

on voit que les conditions cherchées s'écrivent soit $L = 0$, $M = 0$, soit sous une forme plus symétrique

$$M = N = 0.$$

5. Il résulte de ce qui précède que toute équation (E), dont l'intégrale générale est de la forme (1), se déduit d'une équation linéaire du troisième ordre de la forme

$$z''' + z'H(t) + zK(t) = 0, \tag{12}$$

par une transformation (connue)

$$x = \frac{z'\alpha(t) + z\beta(t)}{z'\gamma(t) + z\delta(t)}. \tag{19}$$

L'intégration d'une telle équation est *équivalente* à celle de l'équation (12) qui lui correspond; il est évident, en effet, que la formule (19) donnera l'intégrale générale de l'équation considérée, dès qu'on connaîtra celle de (12). Pour montrer qu'inversement l'intégration de l'équation proposée fournit l'intégrale générale de (12), il suffit de l'établir pour l'équation en $y = \frac{z'}{z}$.

$$y'' + 3yy' + y^3 + Hy + K = 0. \tag{10}$$

Supposons, à cet effet, que l'on connaisse quatre intégrales quelconques y_1, y_2, y_3, y_4 de cette équation (10); il leur correspond des intégrales de (12) z_1, z_2, z_3, telles que l'on ait

$$y_1 = \frac{z'_1}{z_1}, \qquad y_2 = \frac{z'_2}{z_2}, \qquad y_3 = \frac{z'_3}{z_3}, \qquad y_4 = \frac{z'_1 + z'_2 + z'_3}{z_1 + z_2 + z_3}. \tag{20}$$

On a donc

$$(y_1 - y_4)z_1 + (y_2 - y_4)z_2 + (y_3 - y_4)z_3 = 0,$$

et en différentiant

$$[y'_1 - y'_4 + y_1(y_1 - y_4)]z_1 + [y'_2 - y'_4 + y_2(y_2 - y_4)]z_2 + [y'_3 - y'_4 + y_3(y_3 - y_4)]z_3 = 0,$$

d'où l'on tire

$$z_1 = \rho\zeta_1, \qquad z_2 = \rho\zeta_2, \qquad z_3 = \rho\zeta_3,$$

ζ_1, ζ_2, ζ_3 étant des fonctions connues, et ρ un facteur à déterminer. Nous remarquons alors que, le terme en z'' manquant dans l'équation (12), et z_1, z_2, z_3 n'étant définies par les relations (20) qu'à un même facteur constant près, on peut s'imposer la relation

$$\begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 \\ z_2 & z'_2 & z''_2 \\ z_3 & z'_3 & z''_3 \end{vmatrix} = 1,$$

c'est-à-dire, en posant

$$\zeta^3 = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta'_1 & \zeta''_1 \\ \zeta_2 & \zeta'_2 & \zeta''_2 \\ \zeta_3 & \zeta'_3 & \zeta''_3 \end{vmatrix},$$

$$\rho\zeta = 1, \qquad z_1 = \frac{\zeta_1}{\zeta}, \qquad z_2 = \frac{\zeta_2}{\zeta}, \qquad z_3 = \frac{\zeta_3}{\zeta}.$$

On a donc bien, en fonction de y_1, y_2, y_3, y_4 et de leurs dérivées, trois intégrales indépendantes de l'équation (12), c'est-à-dire l'intégrale générale de cette équation.

6. Il résulte de la démonstration précédente que *la connaissance de quatre intégrales particulières de l'équation* (E) *conduit, sans intégration, à l'intégrale générale de cette équation.* Et la relation (19) fait prévoir aussi que la connaissance de une, deux ou trois intégrales particulières de l'équation (E) doit entraîner des simplifications dans l'intégration de cette équation; et il suffira encore d'étudier ces simplifications dans le cas de l'équation (10).

Considérons l'équation, un peu plus générale,

$$y'' + 3yy' + y^3 + \lambda(y' + y^2) + \mu y + \nu = 0, \tag{4}$$

et supposons qu'on en connaisse une intégrale particulière y_1. En posant

$$y = y_1 + \eta, \tag{21}$$

on trouve pour η une équation de la forme

$$\eta'' + 3\eta\eta' + \eta^3 + \lambda_1(\eta' + \eta^2) + \mu_1\eta = 0.$$

Posant ensuite

(22) $$v' - v^2 - Vv = 0,$$

il vient, pour déterminer V, l'équation

(23) $$V' - V^2 - \lambda_1 V - \mu_1 = 0.$$

On aura donc à intégrer cette équation de Riccati, puis l'équation (22), qui, en prenant pour inconnue $\frac{1}{v}$, se change en une équation linéaire du premier ordre.

Donc, quand on connaît une intégrale particulière de l'équation (E), l'intégration complète de cette équation se ramène à celle d'une équation de Riccati, et à deux quadratures.

Si l'on connaît une seconde intégrale particulière de (4), on en déduit une intégrale de (23), qui s'intègre, dès lors, par deux quadratures. *Donc, quand on connaît deux intégrales particulières de l'équation (E), l'intégration de cette équation s'achève par quatre quadratures.*

Le même raisonnement indique enfin que, si l'on connaît trois intégrales de l'équation (4), trois quadratures suffisent pour achever l'intégration. Mais en réalité deux seulement sont nécessaires. Pour le voir, nous revenons à l'équation (10), à laquelle du reste l'équation (4) se ramène immédiatement en changeant y en $y - \frac{l}{3}$. Supposons donc connues trois intégrales y_1, y_2, y_3 de l'équation (10), et posons

$$y_1 = \frac{z_1'}{z_1}, \qquad y_2 = \frac{z_2'}{z_2}, \qquad y_3 = \frac{z_3'}{z_3}.$$

Comme au paragraphe précédent, on peut s'imposer la condition

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_1' & z_1'' \\ z_2 & z_2' & z_2'' \\ z_3 & z_3' & z_3'' \end{vmatrix} = 1,$$

c'est-à-dire

$$z_1 z_2 z_3 \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1' - y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2' - y_2^2 \\ 1 & y_3 & y_3' - y_3^2 \end{vmatrix} = 1,$$

ce qui montre que, ayant calculé par deux quadratures z_1 et z_2, z_3 s'en dé-

duit sans quadrature nouvelle. Dès lors, l'intégration de l'équation (12), et, par suite, de l'équation (10), est achevée.

Donc, *quand on connaît trois intégrales particulières de l'équation* (E), *l'intégration de cette équation s'achève par deux quadratures.*

7. L'équation (4) possède encore une propriété remarquable, qui la rapproche de l'équation de Riccati. C'est que *les valeurs de y et y' les plus générales qui y satisfont s'expriment en fonction de quatre systèmes de valeurs particulières* (y_1, y'_1), (y_2, y'_2), (y_3, y'_3), (y_4, y'_4) et de deux constantes arbitraires par des formules dont la forme ne dépend pas du choix de ces quatre solutions particulières.

Pour le voir, introduisons l'équation linéaire

$$z''' + \lambda z'' + \mu z' + \nu z = 0, \tag{6}$$

dont l'équation (4) dérive par la transformation $y = \frac{z'}{z}$. On pourra poser

$$y_1 = \frac{z'_1}{z_1}, \qquad y_2 = \frac{z'_2}{z_2}, \qquad y_3 = \frac{z'_3}{z_3}, \qquad y_4 = \frac{z'_1 + z'_2 + z'_3}{z_1 + z_2 + z_3},$$

et, pour l'intégrale générale,

$$y = \frac{c_1 z'_1 + c_2 z'_2 + c_3 z'_3}{c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3}.$$

On en conclut

$$z_1(y_1 - y_4) + z_2(y_2 - y_4) + z_3(y_3 - y_4) = 0,$$

$$\begin{aligned} &z_1[y_1(y_1 - y_4) + y'_1 - y'_4] \\ &\quad + z_2[y_2(y_2 - y_4) + y'_2 - y'_4] + z_3[y_3(y_3 - y_4) + y'_3 - y'_4] = 0, \end{aligned}$$

et aussi

$$c_1 z_1(y - y_1) + c_2 z_2(y - y_2) + c_3 z_3(y - y_3) = 0,$$

$$\begin{aligned} &c_1 z_1[y_1(y - y_1) + y' - y'_1] \\ &\quad + c_2 z_2[y_2(y - y_2) + y' - y'_2] + c_3 z_3[y_3(y - y_3) + y' - y'_3] = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en éliminant z_1, z_2, z_3

$$\begin{vmatrix} c_1(y - y_1) & y_1 - y_4 & y_1(y_1 - y_4) + y'_1 - y'_4 \\ c_2(y - y_2) & y_2 - y_4 & y_2(y_2 - y_4) + y'_2 - y'_4 \\ c_3(y - y_3) & y_3 - y_4 & y_3(y_3 - y_4) + y'_3 - y'_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} c_1[y_1(y - y_1) + y' - y'_1] & y_1 - y_4 & y_1(y_1 - y_4) + y'_1 - y'_4 \\ c_2[y_2(y - y_2) + y' - y'_2] & y_2 - y_4 & y_2(y_2 - y_4) + y'_2 - y'_4 \\ c_3[y_3(y - y_3) + y' - y'_3] & y_3 - y_4 & y_3(y_3 - y_4) + y'_3 - y'_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Il n'y a plus qu'à résoudre en y et y', ce qui donne des expressions homogènes et de degré zéro en $c_1 c_2 c_3$, dont les coefficients sont rationnels en $y_1 y_2 y_3 y_4 y'_1 y'_2 y'_3 y'_4$. Ce sont les expressions annoncées.

On peut encore vérifier que l'équation linéaire

$$\frac{\partial f}{\partial t} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + [3yy' - y^3 + \lambda(y' - y^2) + \mu y + \nu]\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

est une *équation de Lie* (¹). On le voit de la manière la plus simple en faisant

$$y' - y^2 = Y, \qquad y = X;$$

l'équation précédente devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + Y\frac{\partial f}{\partial X} + X\left(X\frac{\partial f}{\partial X} + Y\frac{\partial f}{\partial Y}\right) + \lambda Y\frac{\partial f}{\partial Y} + \mu X\frac{\partial f}{\partial Y} + \nu\frac{\partial f}{\partial Y} = 0,$$

où l'on voit apparaître le groupe projectif à deux variables

$$\frac{\partial f}{\partial X},\quad \frac{\partial f}{\partial Y},\quad X\frac{\partial f}{\partial X},\quad X\frac{\partial f}{\partial Y},\quad Y\frac{\partial f}{\partial X},\quad Y\frac{\partial f}{\partial Y},\quad X\left(X\frac{\partial f}{\partial X} + Y\frac{\partial f}{\partial Y}\right),\quad Y\left(X\frac{\partial f}{\partial X} + Y\frac{\partial f}{\partial Y}\right).$$

L'équation (4) partage la propriété que nous venons d'indiquer avec toutes les équations qu'on en déduit, en posant

$$z = \frac{ay + b}{cy + d},$$

a, *b*, *c*, *d* étant quatre constantes arbitraires. On peut du reste démontrer que les équations ainsi formées sont les seules équations de la forme (3) [avec les équations (3) à coefficients constants et les équations linéaires] qui aient une semblable propriété.

II. — Formes canoniques de l'équation

$$A(zz'' - 2z'^2) + Bz'' + Czz' + Dz' + Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = 0.$$

8. Nous avons vu (n° 3) que l'équation

$$(3)\qquad A(zz'' - 2z'^2) + Bz'' + Czz' + Dz' + Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = 0$$

(¹) Voir notre travail *Sur les systèmes d'équations différentielles du premier ordre qui ont des systèmes fondamentaux d'intégrales* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 189[illegible]).

conserve sa forme par tout changement de fonction et de variable indépendante de la forme

$$x = \frac{\alpha(t)y + \beta(t)}{\gamma(t)y + \delta(t)}, \qquad t = \varphi(u). \tag{2}$$

. Il est donc naturel de chercher à disposer des quatre fonctions indéterminées qui figurent dans ces formules (2) de manière à ramener l'équation (1) à une forme canonique. Nous chercherons cette forme canonique parmi celles pour lesquelles on a $A = 0$; et il résulte dès lors de la remarque faite à la fin du n° 3 que tout revient à étudier les réductions dont est susceptible l'équation

$$v'' + lvv' + mv' + pv^3 + qv^2 + rv + s = 0, \tag{3}$$

par les transformations

$$v = \alpha(t)y + \beta(t), \qquad t = \varphi(u) \qquad \text{ou} \qquad \frac{du}{dt} = \chi(t) \tag{4}$$

[t est la variable indépendante dans (3), u la nouvelle variable indépendante]. Il vient, pour l'équation en y,

$$\frac{d^2y}{du^2} + \mathfrak{L}y\frac{dy}{du} + \mathfrak{M}\frac{dy}{du} + \mathfrak{P}y^3 + \mathfrak{Q}y^2 + \mathfrak{R}y + \mathfrak{S} = 0, \tag{5}$$

où l'on a posé

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \frac{l\alpha}{\chi},\\
\mathfrak{M} &= \frac{1}{\alpha\chi^2}(2\alpha'\chi + \alpha\chi' + l\alpha\beta\chi + m\alpha\chi),\\
\mathfrak{P} &= \frac{p\alpha^2}{\chi^2},\\
\mathfrak{Q} &= \frac{1}{\alpha\chi^2}(l\alpha\alpha' + 3p\alpha^2\beta + q\alpha^2),\\
\mathfrak{R} &= \frac{1}{\alpha\chi^2}[\alpha'' + l(\alpha\beta' + \beta\alpha') + m\alpha' + 3p\alpha\beta^2 + 2q\alpha\beta + r\alpha],\\
\mathfrak{S} &= \frac{1}{\alpha\chi^2}(\beta'' + l\beta\beta' + m\beta' + p\beta^3 + q\beta^2 + r\beta + s).
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Nous nous imposons les trois conditions

$$\mathfrak{L} = 3, \qquad \mathfrak{M} = 0, \qquad \mathfrak{Q} = 0,$$

ce qui donne

$$3\frac{\alpha'}{\alpha} - l\beta - \left(\frac{l'}{l} - m\right) = 0,$$

$$l\frac{\alpha'}{\alpha} - 3p\beta - q = 0,$$

$$\gamma = \tfrac{1}{3}l\alpha,$$

d'où l'on tire, en supposant

(7) $$l(9p - l^2) \neq 0,$$

les valeurs suivantes pour α, β et u

(8) $$\alpha = e^{\int\frac{3p(l'-ml)-ql^2}{l(9p-l^2)}dt}, \qquad \beta = \frac{l' - lm - 3q}{9p - l^2}, \qquad u = \tfrac{1}{3}\int l\alpha\, dt;$$

et la forme canonique annoncée est

(9) $$\frac{d^2y}{du^2} + 3y\frac{dy}{du} + \mathrm{I}y^3 + \mathrm{J}y + \mathrm{K} = 0,$$

où l'on a posé

(10) $$\begin{cases} \mathrm{I} = \dfrac{9p}{l^2}, \\ \mathrm{J} = \dfrac{9}{l^2\alpha^2}\left[\dfrac{\alpha''}{\alpha} + l\left(\beta' + \beta\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right) + m\dfrac{\alpha'}{\alpha} + 3p\beta^2 + 2q\beta + r\right] = \dfrac{1}{\alpha^2}\mathrm{J}_0, \\ \mathrm{K} = \dfrac{9}{l^2\alpha^3}(\beta'' + l\beta\beta' + m\beta' + p\beta^3 + q\beta^2 + r\beta + s) = \dfrac{1}{\alpha^3}\mathrm{K}_0, \end{cases}$$

les quantités I, J_0 et K_0 s'exprimant rationnellement au moyen des coefficients de l'équation (3) et de leurs dérivées. Remarquons que α n'est déterminé qu'à un facteur constant près, et que, par suite, on doit considérer comme équivalentes deux formes canoniques qui diffèrent par le changement de J en a^2J, de K en a^3K, et de u en $\frac{1}{a}u + b$, où a et b sont des constantes.

9. Le résultat précédent fournit en même temps les invariants de l'équation (3) pour les transformations (4), et, par suite, au moyen des formules (15) du n° 3, les invariants de l'équation générale (1) pour les transformations (2). Les invariants fondamentaux sont évidemment la variable canonique u, les invariants I, J, K, et leurs dérivées de tous ordres

par rapport à u. On remarquera que I est rationnel par rapport aux coefficients de l'équation et aux dérivées de ces coefficients, et qu'il en est de même de l'invariant

$$\Omega = \frac{J^3}{K^2}. \tag{11}$$

Nous nous bornerons à appliquer ces remarques pour trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (1) se ramène par une transformation (2) à une équation de même forme à coefficients constants.

Supposons, à cet effet, que (1) soit à coefficients constants; il en est de même de l'équation (3) correspondante, qui s'en déduit par la formule

$$x = \frac{A - Bv}{Av}.$$

Dès lors, la variable canonique u ne diffère de α que par un facteur constant, et l'on a les relations

$$I = \text{const.}, \qquad \Omega = \text{const.}, \qquad J u^2 = \text{const.} \tag{13}$$

Ce résultat est en défaut, si l'on a

$$3p(l' + ml) - ql^2 = 0,$$

c'est-à-dire, puisque les coefficients sont constants, et que la condition (7) est toujours supposée vérifiée,

$$3pm - ql = 0.$$

On a, dans ce cas,

$$\alpha = \text{const.}$$

et, par suite,

$$I = \text{const.}, \qquad J = \text{const.}, \qquad K = \text{const.} \tag{14}$$

Réciproquement, si les invariants I, J, K sont constants, la transformée canonique de la proposée est à coefficients constants; et si l'on a les relations (13), cette transformée est de la forme

$$\frac{d^2 y}{du^2} + 3y\frac{dy}{du} + ay^3 + \frac{b}{u^2}y + \frac{c}{u^3} = 0,$$

où a, b, c sont des constantes. Or cette équation se change, en posant

$$y = \frac{z}{u}, \qquad w = \log u,$$

en une équation à coefficients constants, à savoir

$$(15)\qquad \frac{d^2z}{dw^2}+3z\frac{dz}{dw}+az^2-3\left(\frac{dz}{dw}+z^2\right)+(b+2)z+c=0.$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc que l'on ait des relations de la forme (13) ou (14).

Il serait facile de conclure de là des cas d'intégrabilité de l'équation (1) en appliquant aux transformées à coefficients constants (9) et (15) les résultats obtenus, sur les équations (3) à coefficients constants, par M. Picard ([1]) et par M. Mittag-Leffler ([2]).

10. Les résultats précédents sont en défaut si la condition (7) n'est plus vérifiée. Supposons d'abord

$$(16)\qquad 9p-l^2=0,\qquad l\neq 0.$$

On obtiendra une forme canonique convenant à ce cas, en faisant, par exemple,

$$\mathfrak{L}=3,\qquad \mathfrak{P}=1,\qquad \mathfrak{M}=0,\qquad \mathfrak{R}=0;$$

les deux premières de ces conditions étant compatibles à cause de la condition (16) : β se détermine au moyen d'une équation de Riccati, puis α par une quadrature, et l'on obtient alors u par une nouvelle quadrature. La forme canonique est

$$(17)\qquad \frac{d^2y}{du^2}+3y\frac{dy}{du}+y^3+Gy^2+H=0.$$

G et H sont, avec u, les invariants fondamentaux pour ce cas où l'invariant I est égal à l'unité. Il figure du reste deux constantes arbitraires dans l'expression de G et H, et trois dans celle de u. Il y a donc, en réalité, pour une équation (1) donnée, une infinité de formes canoniques (17).

On verra, comme précédemment, que, pour que l'équation donnée soit réductible à une équation à coefficients constants, il faut et il suffit que, dans l'une de ces formes canoniques, les invariants G et H ou bien soient

---

([1]) *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables.* [*Journal de Liouville*, t. V (4e série), p. 281-287.]

([2]) *Sur l'intégration de l'équation* $y''=Ay^3+By^2+Cy+D+(Ey+F)y'$. (*Acta mathematica*, t. XVIII.)

constants, ou bien satisfassent aux conditions

$$\mathrm{G}u = \text{const.}, \qquad \mathrm{H}u^2 = \text{const.}$$

L'expression de G est simple, c'est

$$\mathrm{G} = -\frac{3}{l^2\alpha}(l' + lm - 3q).$$

Il serait facile d'en conclure de nouveau que la condition $\mathrm{G} = 0$ est, avec $\mathrm{I} = 1$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation proposée appartienne à la classe des équations (E), étudiées dans le premier paragraphe.

Passons au cas $l = 0$, en supposant d'abord $p \neq 0$. Nous posons

$$\mathfrak{M} = 0, \qquad \mathfrak{Q} = 0, \qquad \mathfrak{R} = 0,$$

ce qui détermine β sans intégration, puis α par une équation linéaire et homogène du second ordre, et enfin χ par une quadrature. L'équation prend ainsi la forme

$$\frac{d^2y}{du^2} + \mathrm{E}y^2 + \mathrm{F} = 0. \tag{18}$$

Enfin, si l'on a à la fois $l = p = 0$, on peut supposer $q \neq 0$, sans quoi l'équation serait linéaire, et l'on pourra poser

$$\mathfrak{M} = 0, \qquad \mathfrak{Q} = 1, \qquad \mathfrak{R} = 0,$$

ce qui donne α et β sans intégration, puis χ par une quadrature, et l'équation proposée devient simplement

$$\frac{d^2y}{du^2} + y^2 + \mathrm{T} = 0. \tag{19}$$

III. — Sur un cas d'abaissement des équations différentielles du second ordre.

11. Nous avons eu plus haut (n° 6) l'occasion de nous servir de cette propriété de l'équation

$$\eta'' + 3\eta\eta' + \eta^3 + \lambda(\eta' + \eta^2) + \mu\eta = 0,$$

de s'abaisser, par la transformation

$$V = \frac{\eta' + \eta^2}{\eta},$$

à une équation du premier ordre

$$V' + V^2 + \lambda V + \mu = 0.$$

Nous allons considérer maintenant les équations différentielles du second ordre

$$(1) \qquad x'' = \varphi(x', x, t),$$

qui jouissent de la propriété analogue que l'équation dont dépend une fonction de x et x',

$$(2) \qquad V = F(x', x),$$

soit, pour une forme convenable de la fonction F, une équation du premier ordre

$$(3) \qquad V' = G(V, t).$$

L'intégration de l'équation (1) revient alors à celle de l'équation du premier ordre (2), où l'on devra remplacer V par l'intégrale générale de l'équation (3), c'est-à-dire revient à l'intégration successive de deux équations du premier ordre, dès qu'on a déterminé une fonction F répondant à la question.

Nous montrerons que l'on peut toujours, par des différentiations, reconnaître si une équation donnée (1) possède la propriété précédente, et que, en exceptant le cas où la variable indépendante t ne figure pas explicitement dans l'équation proposée (1), et un cas particulier où F se détermine par quadratures, on obtient toujours alors, sans intégration, une fonction F satisfaisant à la question. Nous pouvons donc dire que les équations considérées s'abaissent au premier ordre.

La condition pour que la transformée en V soit du premier ordre s'obtient immédiatement, en écrivant que le déterminant fonctionnel, en x' et x, de F et de

$$V' = \varphi \frac{\partial F}{\partial x'} + x' \frac{\partial F}{\partial x},$$

est nul, ce qui donne

$$(4)\qquad \varphi\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}-\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right) + x'\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2=0.$$

En joignant à cette équation la condition

$$(5)\qquad \frac{\partial F}{\partial t}=0,$$

on a les équations du problème. On les transforme, en posant

$$(6)\qquad Z=\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial x'},\qquad \text{ou}\qquad \frac{\partial F}{\partial x}-Z\frac{\partial F}{\partial x'}=0,$$

ce qui donne les équations

$$(7)\qquad \varphi\frac{\partial Z}{\partial x'}+x'\frac{\partial Z}{\partial x}-Z^2-Z\frac{\partial\varphi}{\partial x'}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial Z}{\partial t}=0.$$

On en tire, en différentiant par rapport à t la première et posant

$$\psi=\log\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x'}-Z\frac{\partial\psi}{\partial x'}+\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,$$

et, en différentiant une seconde fois,

$$(8)\qquad Z\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}=0.$$

Si donc $\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t}$ n'est pas nul identiquement, on tire de là la valeur de Z, qui doit être indépendante de t, de sorte que $\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}$ doivent être de la forme

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}=f(t)\frac{\partial H(x',x)}{\partial x'},\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}=f(t)\frac{\partial H(x',x)}{\partial x},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=f(t)\,H(x',x)+f_1(t),$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=t_0} = a\,\mathrm{H}(x', x) + b,$$

a et b étant deux constantes. On voit donc qu'il suffit de prendre

$$\mathrm{F}(x', x) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \mathrm{F}_0(x', x),$$

pour avoir une solution du problème et, d'après l'équation (6), la soluti
la plus générale sera

$$\mathrm{F} = \text{fonct. arbitr. de } \mathrm{F}_0.$$

Quant aux conditions de possibilité, on les obtiendrait en portant la v
leur (8) dans les équations (7).

Appliquons, par exemple, ces résultats à

$$x'' = -3xx' - x^3 + \lambda(t)(x' + x^2) + \mu(t)x.$$

Il vient

$$\psi = \log[\lambda'(x' + x^2) + \mu' x],$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\lambda''(x' + x^2) + \mu'' x}{\lambda'(x' + x^2) + \mu' x},$$

$$\mathrm{F}_0 = \frac{a(x' + x^2) + bx}{c(x' + x^2) + dx}, \qquad \mathrm{F} = \text{fonct. arb. de } \left(\frac{x' + x^2}{x}\right).$$

12. Si $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x' \partial t}$ est nul identiquement, on voit facilement, en prenant $\frac{1}{Z}$ pou
inconnue, à la place de Z, que le problème est impossible si l'on n'a pas e
même temps $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} = 0$ (identiquement), c'est-à-dire si φ n'est pas de l
forme

$$\varphi = \mathrm{A}(x', x)\,\theta(t) + \mathrm{B}(x', x).$$

Débarrassons-nous d'abord du cas où φ ne contiendrait pas t; la première équation (7) détermine alors seule Z. On intégrera donc d'abord l'équation

$$\varphi(x', x)\frac{\partial f}{\partial x'} + x'\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

ce qui revient à chercher, suivant le procédé classique usité pour de telles équations, une intégrale première de l'équation proposée. Prenant alors, dans (7), une intégrale de (9) à la place de l'une des variables x', x, on

est conduit, pour déterminer Z, à une équation de Riccati ordinaire, mais qui s'intègre par quadratures, car on a évidemment l'intégrale particulière

$$Z = -\frac{\varphi(x', x)}{x'}.$$

Laissons donc de côté ce cas, dans lequel notre problème n'a plus d'intérêt, et revenons à l'équation

$$x'' = \varphi(x', x, t) = A(x', x)\,\theta(t) + B(x', x).$$

Les équations (7) se remplacent par les suivantes :

$$(10)\qquad \begin{cases} A\dfrac{\partial Z}{\partial x'} - Z\dfrac{\partial A}{\partial x'} + \dfrac{\partial A}{\partial x} = 0, \\ B\dfrac{\partial Z}{\partial x'} + x'\dfrac{\partial Z}{\partial x} - Z^2 - Z\dfrac{\partial B}{\partial x'} + \dfrac{\partial B}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

En écrivant qu'elles forment un système intégrable, on obtient une condition de la forme

$$(11)\qquad PZ^2 + QZ + R = 0.$$

Si cette équation n'est pas une identité, elle permet de voir, par des différentiations, si le problème est possible et fournit, dans ce cas, la seule valeur de Z convenant au problème, c'est-à-dire aux équations (10). On en peut conclure l'une des valeurs de F; en effet, la première équation (10) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{Z}{A}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{A}\right).$$

On déterminera donc, par une quadrature, une fonction $U(x', x)$ telle que

$$dU = \frac{1}{A}\,dx' + \frac{Z}{A}\,dx,$$

et cette fonction U satisfait à la condition

$$\frac{\partial U}{\partial x} = Z\frac{\partial U}{\partial x},$$

c'est-à-dire que $F = U$ est une solution du problème, et la solution la plus générale est

$$F = \text{fonct. arbitr. de } U.$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Z [illegible]

[illegible]

[illegible]

Mais cette équation admet l'intégrale évidente $\zeta = -X$, et si l'on pose

$$\zeta = -X + \zeta_0,$$

ζ_0 est donné par

$$\zeta'_0 = \zeta_0^2 - X\zeta_0,$$

de sorte que l'on a

$$(13) \qquad Z = x'\zeta(x) = -x'\left[X + \frac{e^{-\int X dx}}{\int e^{\int X dx} dx}\right].$$

On a ensuite

$$\frac{\partial F}{\partial x} - x'\zeta(x)\frac{\partial F}{\partial x'} = 0,$$

dont on a une solution par une quadrature

$$(14) \qquad U = x' e^{\int \zeta(x) dx},$$

et la solution générale est une fonction arbitraire de U. Le problème se résout donc entièrement par des quadratures, comme nous l'avions annoncé.

14. Si l'on veut seulement intégrer l'équation (12) on prendra la solution la plus simple

$$V = x' e^{-\int X dx},$$

la transformée en V étant

$$V' - T(t)V = 0;$$

on en tire immédiatement

$$V = e^{\int T dt},$$

et, par suite, pour l'intégrale générale de la proposée,

$$(15) \qquad \int e^{\int T dt} dt = \int e^{-\int X dx} dx.$$

L'équation (12) s'intègre donc par quadratures, et l'on voit que son intégrale générale est de la forme

$$af(x) + bg(t) + c = 0,$$

c'est-à-dire que les constantes arbitraires y figurent linéairement, de sorte que c'est un cas particulier des équations étudiées par M. Lie (*voir* n° 1) et qui sont réductibles à la forme $y'' = 0$.

On peut enfin remarquer que l'équation (12) possède, comme l'équation étudiée au premier paragraphe,

$$x'' + 3xx' + x^3 + \lambda(t)(x' + x^2) + \mu(t)x + \nu(t) = 0,$$

des systèmes fondamentaux d'intégrales ([1]). Si l'on considère, en effet. l'équation linéaire aux dérivées partielles qui lui correspond

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left[x'\frac{\partial f}{\partial x} + x'^2 X \frac{\partial f}{\partial x'}\right] + T(t)x'\frac{\partial f}{\partial x'} = 0,$$

c'est une équation de Lie ([2]), car les deux transformations infinitésimales

$$X_1 f = x'\frac{\partial f}{\partial x'}, \qquad X_2 f = x'\frac{\partial f}{\partial x} + x'^2 X \frac{\partial f}{\partial x'}$$

satisfont à l'identité $(X_1, X_2) = X_2$ et, par conséquent, forment un groupe. On vérifie, du reste, sans peine qu'en posant

$$M(x) = \int e^{-\int X\,dx}\,dx,$$

on a, entre une intégrale particulière quelconque x_0 et l'intégrale générale x, la relation

$$M(x) = aM(x_0) + b,$$

où a, b sont des constantes arbitraires; on a donc bien une relation de la forme

$$x = \Phi(x_0 \mid a, b),$$

entre une intégrale particulière et l'intégrale générale, la fonction Φ restant la même, quelle que soit l'intégrale particulière considérée, de sorte qu'on peut dire qu'une intégrale particulière quelconque constitue un système fondamental.

([1]) Nous avons indiqué quelques résultats sur les équations du deuxième ordre, qui ont cette propriété, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 1[er] mai 1893.

([2]) *Voir* notre Travail déjà cité au n° 7.

QUELQUES RECHERCHES

SUR

LES FONCTIONS A MULTIPLICATEURS,

PAR M. E. LANDFRIEDT.

INTRODUCTION.

Les fonctions à multiplicateurs, dont nous allons nous occuper, ont fait jusqu'à présent l'objet des travaux d'un mathématicien français ([1]). Les résultats obtenus par ce savant ont mis en évidence l'analogie frappante qui existe entre la théorie de ces fonctions et celle des fonctions algébriques rationnelles en s et z. Nous allons essayer de faire ressortir davantage cette analogie, en traitant un genre de questions auxquelles n'a pas touché l'auteur déjà cité.

Après avoir exposé, dans un premier Chapitre, une démonstration de l'extension du théorème d'Abel aux fonctions à multiplicateurs $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, basée sur la seule définition de ces fonctions, nous arrivons au véritable but de notre travail. Après avoir défini ce que nous entendons par défaut et excès du système de pôles d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, nous arrivons à introduire dans la théorie de ces fonctions une classification entièrement analogue à celle qu'a introduite M. Christoffel dans la théorie des fonctions algébriques. Nous donnons les propriétés essentielles caractérisant les deux espèces de fonctions Φ, que distingue notre classification, et nous établissons notamment une formule générale pour représenter chacune de ces deux catégories de fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

La méthode dont nous nous servons est celle de Riemann, adoptée aussi

---

([1]) APPELL, *Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce* (*Journal de Math.* par M. Resal; 1883). — P. APPELL, *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs, etc.* (*Acta. math.*, t. XIII).

par M. P. Appell. Nous employons cependant, pour rendre simplement connexe la surface T de Riemann, un mode de coupures un peu différent de celui dont se sert M. P. Appell.

CHAPITRE I.

I. — Généralités.

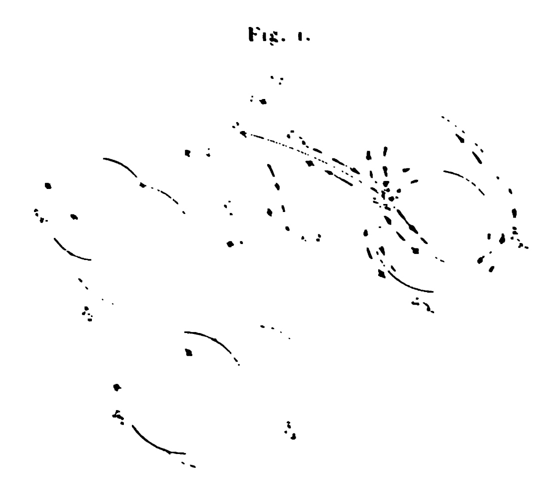
Soit

$$F(s^n, z^m) = 0$$

l'équation algébrique définissant s en fonction de z. Nous introduisons la surface de Riemann correspondante, que nous désignerons par la lettre T. Cette surface sera transformée en la surface simplement connexe T′ de Riemann au moyen d'un système de $3p$ coupures a_λ, b_λ, c_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, p)$. Ici nous ne suivrons pas entièrement le mode de coupures adopté par M. P. Appell.

Après avoir introduit les $2p$ coupures a_λ, b_λ, ainsi que le fait M. P. Appell, nous prenons sur la surface T un point quelconque ω, ne coïncidant avec aucun point singulier de la fonction s. Cela fait, nous menons à partir du

Fig. 1.



point ω p coupures c_λ se continuant, sans se couper mutuellement, jusqu'aux p points d'intersection (a_λ, b_λ). Sur chacune de ces $3p$ coupures ainsi définies nous distinguons deux bords, un bord positif et un bord né-

gatif, ainsi que le montre la figure. L'ensemble de ces bords formera une seule ligne courbe, limite de la surface simplement connexe T'. Les flèches indiquent les sens d'un parcours positif de cette courbe limite.

Le mode de coupures ainsi introduit permet de simplifier certaines démonstrations et de rendre plus symétriques certaines formules de M. P. Appell. C'est ainsi que les relations liant les modules de périodicité d'une intégrale de première espèce seront remplacées par les suivantes :

$$A_\lambda(1-n_\lambda)-B_\lambda(1-m_\lambda)-C_\lambda=0 \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda=1}^{p} C_\lambda=0 \quad (\lambda=1,2,\ldots,p).$$

De même la relation 13°, donnée par M. P. Appell (p. 34) sera remplacée par

$$\sum_{\lambda=1}^{p}[A_\lambda(s-n_\lambda)-B_\lambda(1-m_\lambda)]=0,$$

qui se déduit des relations précédentes par une simple addition.

Comme on le voit également dans cette nouvelle notation, l'intégrale de première espèce aura, non plus $3p-1$ modules de périodicité, mais bien $3p$. C'est là surtout ce qui contribuera à rendre les formules plus symétriques. Une remarque analogue s'applique aux intégrales de seconde et de troisième espèce.

Dans la suite nous désignerons toute fonction aux multiplicateurs m_λ, n_λ par le symbole $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, l'indice dénotant les multiplicateurs.

II. — Extension du théorème d'Abel aux fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

Nous allons maintenant développer une démonstration de l'extension du théorème d'Abel aux fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, basée, non plus comme celle de M. P. Appell sur la formule donnant la fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, mais sur *la seule définition de la fonction*. Cette démonstration nous permettra en même temps de donner ce célèbre théorème sous une forme un peu plus complète que celle sous laquelle l'a énoncé M. P. Appell.

Avant d'en arriver à notre démonstration, nous établissons quelques théorèmes préliminaires.

Théorème A. — *Toute fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ uniforme sur T' ne devient infinie en T' qu'en un nombre de points fini et jamais qu'à un ordre fini.*

Démonstration. — $\frac{d \log \Phi_{m_\lambda n_\lambda}}{dz} = \varphi$ est une fonction algébrique et n'a, par conséquent, que des pôles d'un ordre fini et en nombre fini. Or φ ne peut devenir infinie qu'aux zéros et aux infinis de $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

Donc, etc.

Théorème B. — *La somme* N *des nombres d'ordre de* $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ *en* T′ *est égale à zéro.*

Démonstration. — Nous entendons ici par nombre d'ordre ce que Neumann (*Vorles. über Riem. Theorie d. Abel'schen Integr.*, p. 41) entend par *Ordnungszahlen*. Nous avons alors, en vertu d'un théorème de Cauchy,

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{(T')} d \log \Phi_{m_\lambda n_\lambda},$$

l'intégrale étant étendue, dans le sens positif, au contour complet de la surface simplement connexe T′.

Or

$$\begin{aligned} \int_{(T')} d \log \Phi_{m_\lambda n_\lambda} = & \sum \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ a \\ \gamma \end{matrix} \right|_\lambda (d \overset{+}{\log} \Phi_{m_\lambda n_\lambda} - d \overset{-}{\log} \Phi_{m_\lambda n_\lambda}) \\ & + \sum \int \left| \begin{matrix} \beta \\ b \\ \gamma \end{matrix} \right|_\lambda (d \overset{-}{\log} \Phi_{m_\lambda n_\lambda} - d \overset{+}{\log} \Phi_{m_\lambda n_\lambda}) \\ & + \sum \int \left| \begin{matrix} \omega \\ c \\ \delta \end{matrix} \right|_\lambda (d \overset{+}{\log} \Phi_{m_\lambda n_\lambda} - d \overset{-}{\log} \Phi_{m_\lambda n_\lambda}); \end{aligned}$$

donc N = 0, parce que le long de chaque coupure

$$d \overset{+}{\log} \Phi_{m_\lambda n_\lambda} = d \overset{-}{\log} \Phi_{m_\lambda n_\lambda}.$$

De ce théorème, nous déduisons immédiatement :

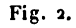
Théorème C. — $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ *possède en* T′ *autant de zéros que d'infinis.*

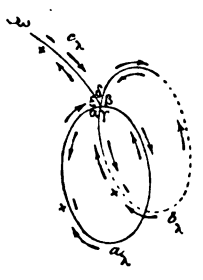
Ces théorèmes préliminaires une fois établis, nous abordons la démonstration du théorème d'Abel dans son extension aux fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

Nous considérons, à cet effet, la fonction

$$P = u_\mu \frac{d \log \Phi_{m_\lambda n_\lambda}}{dz},$$

où u_μ désigne l'intégrale normale de première espèce de Riemann, possédant le long de a_λ le module de périodicité $\binom{\lambda}{\mu}\pi i$ et le long de b_λ, le mo-


Fig. 2.



dule de périodicité $a_{\lambda\mu}$. Le symbole $\binom{\lambda}{\mu}$ désigne zéro ou l'unité, selon que $\lambda \gtreqless \mu$ ou $\lambda = \mu$.

Soient

$$\begin{array}{lllllll} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3, & \ldots, & \varepsilon_k, & \ldots, & \varepsilon_q \quad \text{les zéros,} \\ \delta_1, & \delta_2, & \delta_3, & \ldots, & \delta_k, & \ldots, & \delta_q \quad \text{les infinis de } \Phi_{m_\lambda n_\lambda}. \end{array}$$

Nous aurons alors :

1° Dans le voisinage de ε_k, $\dfrac{d \log \Phi_{m_\lambda n_\lambda}}{dz} = \dfrac{1}{z - \varepsilon_k}$ + fonction continue,

$$P = \frac{u_\mu(\varepsilon_k)}{z - \varepsilon_k} + \text{fonct. cont.}$$

P aura donc, en cet endroit, un résidu, Rés.$(\varepsilon_k) = u_\mu(\varepsilon_k)$.

2° Dans le voisinage de δ_k $\dfrac{d \log \Phi_{m_\lambda n_\lambda}}{dz} = \dfrac{1}{z - \delta_k}$ + fonct. cont.,

$$P = -\frac{u_\mu(\delta_k)}{z - \delta_k} + \text{fonct. cont.}$$

Le résidu correspondant de P sera donc Rés.$(\delta_k) = - u_\mu(\delta_k)$. La fonction P ne possédant pas sur la surface T′ d'autre résidu différent de zéro, la somme γ de ces résidus sera

$$(\alpha) \qquad \gamma = \sum_{k=1}^{k=q} [u_\mu(\varepsilon_k) - u_\mu(\delta_k)].$$

Or, P est partout uniforme sur T′; nous aurons donc, d'après un théorème connu,

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_{(T')} u_\mu \, d\log\Phi_{m_\lambda n_\lambda},$$

l'intégrale étant étendue, dans le sens positif, au contour complet de T′. Nous poserons, pour abréger,

$$2\pi i\gamma = \sum_{\lambda=1}^{p}(a_\lambda) + \sum_{1}^{p}(b_\lambda) + \sum_{1}^{p}(c_\lambda),$$

et nous calculerons séparément chacune des trois sommes à droite

$$(1) \qquad (a_\lambda) = \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (\overset{+}{u}_\mu d\log\overset{+}{\Phi}_{m_\lambda n_\lambda} - \overset{-}{u}_\mu d\log\overset{-}{\Phi}_{m_\lambda n_\lambda})$$

$$= \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (\overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu)\, d\log\Phi_{m_\lambda n_\lambda};$$

donc

$$\sum(a_\lambda) = \pi i \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu d\log\Phi_{m_\lambda n_\lambda} = \pi i(\log n_\mu + g_\mu 2\pi i),$$

où g_μ désigne un nombre entier.

D'une manière analogue, nous avons

$$(2) \qquad \sum_{1}^{p}(b_\lambda) = -\sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu}\log m_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu} h_\lambda 2\pi i,$$

$$(3) \qquad \sum_{\lambda=1}^{p}(c_\lambda) = 0.$$

Nous trouvons ainsi

$$(\beta) \qquad \gamma = \frac{1}{2}\log n_\mu - \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu}\log m_\lambda + g_\mu \pi i + \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu} h_\lambda.$$

En égalant les deux expressions ci-dessus obtenues pour γ, nous avons le théorème suivant :

Théorème d'Abel. — *Si* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$, $(\delta_1, \ldots, \delta_q)$ *désignent les zéros et*

les infinis d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, nous avons les p relations

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{k=q}[u_\mu(\varepsilon_k)-u_\mu(\delta_k)]=\frac{1}{2}\log n_\mu-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda=1}^{p}a_{\lambda\mu}\log m_\lambda+(g|h)_\mu \quad (\mu=1,2,3,\ldots,p),$$

où

$$(g\,|\,h)_\mu=g_\mu\pi i+\sum_{\lambda=1}^{p}h_\lambda a_{\lambda\mu}.$$

Les logarithmes figurant à droite sont considérés comme uniformes, tandis que les nombres entiers g_λ, h_λ sont définis rigoureusement par les formules

$$\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu d\log\Phi_{m_\lambda n_\lambda}=\log n_\mu+2\pi i\,g_\mu,$$

$$\int\left|\begin{matrix}\beta\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda d\log\Phi_{m_\lambda n_\lambda}=\log m_\lambda-2\pi i\,h_\lambda.$$

Nous démontrons réciproquement que, si les équations (1) sont vérifiées et si, de plus, g_μ et h_λ sont des nombres entiers, les deux systèmes de points $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$ et $(\delta_1, \ldots, \delta_q)$ sont les zéros et les infinis d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

A cet effet, nous considérons la fonction

$$\Phi=e^{\sum\limits_{k=1}^{q}\omega_k\delta(z)-2\sum\limits_{\lambda=1}^{p}h_\lambda u_\lambda+\frac{1}{\pi i}\sum\limits_{\lambda=1}^{p}\log m_\lambda u_\lambda+\text{const.}}.$$

Cette fonction Φ est uniforme en T′ et admet, ainsi qu'il est facile de le vérifier,

Le long de a_λ, le multiplicateur m_λ,

» c_λ, » 1,

» b_μ, le multiplicateur

$$e^{2\sum\limits_{k=1}^{q}[u_\mu(\varepsilon_k)-u_\mu(\delta_k)]-2\sum\limits_{\lambda=1}^{p}h_\lambda a_{\lambda\mu}+\frac{1}{\pi i}\sum\limits_{\lambda=1}^{p}a_{\lambda\mu}\log m_\lambda}.$$

Puisque, par hypothèse, les équations (1) sont vérifiées et que g_μ et h_λ sont supposés être des nombres entiers, le multiplicateur se réduit à

$$e^{\log n_\mu+g_\mu 2\pi i}=n_\mu.$$

La réciproque du théorème d'Abel se trouve ainsi démontrée. Nous résumons en un seul théorème.

Théorème. — *Pour qu'il existe une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ uniforme en T et admettant le long de a_λ et b_λ les multiplicateurs constants m_λ, n_λ, il faut et il suffit que les équations (1) soient vérifiées, g_λ et h_λ étant des nombres entiers.*

Cas spécial. — Le cas spécial que M. P. Appell distingue toujours rigoureusement du cas général se présente toutes les fois que les zéros et les infinis de $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ sont les zéros et les infinis d'une fonction algébrique rationnelle en s et z, et ne peut se présenter que dans cette hypothèse. Nous n'entrons pas dans la discussion de ce cas spécial, au moins pour ce qui regarde les équations du théorème d'Abel. Les multiplicateurs m_λ, n_λ satisferont à certaines relations, qui se trouvent chez M. P. Appell, toutefois sans la détermination des nombres entiers M, N qui y figurent. Nous n'insistons pas.

CHAPITRE II.

CLASSIFICATION DES FONCTIONS $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

I. — Cas général.

Nous donnons dans ce Chapitre, avec les modifications nécessaires, l'extension aux fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ de principes introduits par M. Christoffel dans la théorie des fonctions algébriques. *Voir*, à ce sujet, le commencement du Mémoire de M. Christoffel, *Ueber die canonische Form der Riemann'schen integrale 1ter Gattung* (Brioschi, *Annali di Matematica*, 2e série, t. IX).

Nous prenons comme point de départ, dans les développements qui suivent, l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=q} G_k\,\omega'(\varepsilon_k) = 0, \tag{1}$$

donnée par M. P. Appell, page 28 de son Mémoire. Dans cette équation, les

points ε_k sont les pôles de $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ et G_k les résidus correspondants, tandis que ω' est la dérivée par rapport à z de l'intégrale générale ω de première espèce relative aux multiplicateurs inverses $m'_\lambda = 1 : m_\lambda$, $n'_\lambda = 1 : n_\lambda$.

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$ les pôles d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$; nous supposons que les coefficients $c_1, \ldots, c_{p-1}$ entrant dans l'expression de l'intégrant général de première espèce

$$\omega' = c_1 \omega'_1 + c_2 \omega'_2 + \ldots + c_{p-1} \omega'_{p-1},$$

soient déterminés de manière que ω' devienne zéro en tous les points $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ à l'exception d'un seul ε_k. L'équation (1) nous donnera alors

$$G_k \omega'(\varepsilon_k) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \omega'(\varepsilon_k) = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Si* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$ *désignent les pôles d'une fonction* $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ *et* ω' *l'intégrant général de première espèce relatif aux multiplicateurs inverses* $m'_\lambda = 1 : m_\lambda$, $n'_\lambda = 1 : n_\lambda$, *le système d'équations*

$$(1_a) \qquad \omega'(\varepsilon_1) = 0, \quad \omega'(\varepsilon_2) = 0, \quad \ldots, \quad \omega'(\varepsilon_q) = 0$$

contiendra au moins une *équation surnuméraire.*

Soit ρ le nombre exact des équations surnuméraires du système $\omega'(\varepsilon_1) = 0, \ldots, \omega'(\varepsilon_q) = 0$, $q - \rho$ le nombre des autres équations que nous appellerons *essentielles*. Nous aurons alors

$$\rho \overline{\overline{>}} 1 \qquad \text{et} \qquad q - \rho \overline{\overline{<}} p - 1,$$

puisque le nombre des équations essentielles ne peut dépasser le nombre $p - 1$ des coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$ à notre disposition. Soient

$$\omega'(\varepsilon_1) = 0, \quad \ldots, \quad \omega'(\varepsilon_\alpha) = 0, \quad \ldots, \quad \omega'(\varepsilon_{q-\rho}) = 0 \quad \text{les équat. essentielles,}$$
$$\omega'(\varepsilon_{q-\rho+1}) = 0, \quad \ldots, \quad \omega'(\varepsilon_\beta) = 0, \quad \ldots, \quad \omega'(\varepsilon_q) = 0 \quad \text{» surnuméraires.}$$

Les membres gauches de ces équations sont liés par des relations de la forme

$$(1_b) \qquad \omega'(\varepsilon_\beta) \equiv \sum_{\alpha=1}^{q-\rho} \gamma_{\alpha\beta}\, \omega'(\varepsilon_\alpha),$$

où le signe $\equiv$ est le symbole de l'identité. En effet, les relations (1_b) sont des identités par rapport aux coefficients $c_1, \ldots, c_{p-1}$.

En vertu de (1_b), l'équation (1) prend la forme

$$(1_c) \qquad \sum_\alpha \omega'(\varepsilon_\alpha)\Big(G_\alpha + \sum_\beta G_\beta \gamma_{\alpha\beta}\Big) = 0.$$

Or, les équations $\omega'(\varepsilon_\alpha) = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, q-\rho)$ ne contenant aucune équation surnuméraire, nous pourrons déterminer les coefficients $c_1, \ldots, c_{p-1}$ de manière à avoir

$$\omega'(\varepsilon_1) = a_1, \qquad \ldots, \qquad \omega'(\varepsilon_\alpha) = a_\alpha, \qquad \ldots, \qquad \omega'(\varepsilon_{q-\rho}) = a_{q-\rho},$$

où $a_1, \ldots, a_{q-\rho}$ désignent des quantités arbitraires. Nous pourrons notamment déterminer les coefficients de manière que $\omega'(\varepsilon_\alpha)$ devienne zéro en tous les points ε_α, à l'exception d'un seul, que nous choisirons d'une façon arbitraire. L'équation (1_c) nous donnera, par suite,

$$(2) \qquad G_\alpha + \sum_\beta \gamma_{\alpha\beta} G_\beta = 0.$$

Cette relation n'est autre chose que la solution, par rapport aux résidus $G_1, \ldots, G_q$, du système de $p-1$ équations

$$\begin{array}{l} G_1\omega'_1(\varepsilon_1) \;\; + G_2\omega'_1(\varepsilon_2) \;\; + \ldots + G_q\omega'_1(\varepsilon_q) \;\; = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ G_1\omega'_{p-1}(\varepsilon_1) + G_2\omega'_{p-1}(\varepsilon_2) + \ldots + G_q\omega'_{p-1}(\varepsilon_q) = 0. \end{array}$$

Il résulte de cette relation (2) que, si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ désignent les pôles d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, les résidus correspondants ne pourront être choisis arbitrairement. Le nombre des résidus pouvant être pris d'une façon arbitraire est égal au nombre ρ des équations surnuméraires du système (1_a). Les autres résidus seront des fonctions linéaires des premiers et seront donnés par la relation (2). C'est là une propriété commune aux fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ et aux fonctions algébriques rationnelles en s et z.

La considération du nombre $q-\rho$ des équations essentielles va nous conduire à une classification des fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ en deux grandes catégories. Si

$$q - \rho < p - 1,$$

l'intégrant général ω' ne deviendra pas identiquement nul, si nous déterminons les coefficients $c_1, \ldots, c_{p-1}$ de manière que ω' devienne zéro

aux points $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{q-\rho}$. Si, au contraire,

$$q-\rho=p-1,$$

ω' sera identiquement nul, si nous imposons aux coefficients c la même détermination.

Dans le premier cas, nous appellerons le système de points $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ un *système de première espèce*, et la fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, qui devient infinie en ces points, *fonction* $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ *de première espèce*. Dans le second cas, nous parlerons de *systèmes de deuxième espèce et de fonctions* $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ *de deuxième espèce*.

Nous allons nous occuper successivement de ces deux espèces de fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

A. — *Fonctions* $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ *de première espèce.*

Toute $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$ (fonction de première espèce) est caractérisée par les relations

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} q-\rho=p-2-\lambda, \\ \lambda \geqq 0. \end{cases}$$

Tout intégrant général de première espèce

$$\omega'=c_1\omega'_1+c_2\omega'_2+\ldots+c_{p-1}\omega'_{p-1}$$

contient $p-1$ coefficients constants et sera, par suite, déterminé à un facteur constant près, si nous lui imposons $p-2$ zéros essentiels. Le nombre $q-\rho$ des points essentiels étant inférieur de λ à $p-2$, ces points essentiels ne suffiront pas pour déterminer complètement l'intégrant ω'. Nous appellerons λ le *défaut* du système $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ et du système d'équations (1_a); ρ sera appelé *excès* du système de points et du système d'équations (1_a). Les deux nombres ρ et λ sont les nombres caractéristiques de tout système de première espèce.

Soient $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$ une fonction de première espèce, ω' l'intégrant général de première espèce aux multiplicateurs inverses. Nous formons le produit

$$\tau=\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}\omega'.$$

Ce produit sera une fonction algébrique, uniforme et régulière sur T.

Nous supposons ω' déterminé de manière à devenir zéro en tous les points $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ désignant les pôles de $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$, τ ne pourra alors devenir infinie qu'aux infinis de ω', c'est-à-dire aux points de ramification de T; c'est, par conséquent, l'intégrant général de première espèce w' de Riemann par rapport à T; donc

$$\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda} \omega' = w'.$$

ω' n'étant pas identiquement nul, nous avons le théorème suivant :

Théorème II. — *Toute fonction $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$ de première espèce est de la forme*

$$\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda} = \frac{w'}{\omega'}.$$

Cette expression nous donne immédiatement une limite supérieure pour le nombre de pôles d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ de première espèce. En effet, ω' possède

$$2p - 2$$

zéros situés à distance finie. C'est là aussi la limite supérieure en question. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *Le nombre des pôles d'une fonction $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$ est*

$$\overline{\gtrless} 2p - 2.$$

Les deux nombres ρ et λ ne sont pas indépendants l'un de l'autre. En effet, si

$$q = p + r,$$

nous pourrons, outre les q pôles, imposer à $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$ r zéros choisis arbitrairement. $\Phi^{(1)}$ sera alors déterminé à un facteur constant près. Dans le cas actuel, nous avons

$$q = p + (\rho - \lambda - 2),$$

c'est-à-dire que nous pourrons, outre les q pôles, choisir arbitrairement

$$\rho - \lambda - 2$$

zéros de $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$. Nous obtenons ainsi une série de relations

$$\begin{array}{lcl}
\rho = \lambda + 2, & \text{pour} & q = p, \\
\rho = \lambda + 3, & » & q = p + 1, \\
\ldots\ldots, & & \ldots\ldots, \\
\rho = \lambda + 2 + r, & » & q = p + r, \\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots, \\
\rho = \lambda + p, & » & q = 2p - 2.
\end{array}$$

Il suit de là que, pour une valeur donnée de q, ρ et λ sont liés par une relation bien déterminée. ρ est toujours plus grand que λ ; sa valeur minima est $2 + r$ pour $q = p + r$.

Pour $p = 0$, il n'existe pas de fonction à multiplicateurs constants.

Pour $p = 1$, nous avons $2p - 2 = 0$. Les fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ correspondant à cette valeur de p ne peuvent donc être des fonctions de première espèce.

Nous nous bornons à ces développements pour les fonctions $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$ de première espèce.

B. — *Fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ de seconde espèce.*

Toute fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ (fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ de seconde espèce) est caractérisée par la relation

$$(\beta) \qquad q - \rho = p - 1,$$

où le nombre ρ, auquel ici aussi nous donnerons le nom d'*excès* du système des équations essentielles, est au moins égal à l'unité. Nous pouvons, par suite, énoncer immédiatement le théorème suivant :

Théorème IV. — *Toute fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ possède au moins p pôles simples.*

De la relation (β), qui peut s'écrire

$$q = p + (\rho - 1),$$

nous déduisons, en outre, le théorème suivant :

Théorème V. — *Si nous imposons à une fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ de seconde espèce q pôles simples, nous pourrons encore choisir arbitrairement*

$$\rho - 1$$

zéros de cette fonction; $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ sera alors déterminée à un facteur constant près.

Soient maintenant $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ le système des pôles d'une fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\alpha, \ldots, \varepsilon_{q-\rho}$ les points essentiels de ce système. En vertu de la relation (β), les équations

$$\omega'(\varepsilon_1) = 0, \quad \ldots, \quad \omega'(\varepsilon_\alpha) = 0, \quad \omega'(\varepsilon_{p-1}) = 0,$$

où ω' désigne comme précédemment l'intégrant général de première espèce aux multiplicateurs inverses, ne renfermeront aucune équation surnuméraire. Nous pourrons donc déterminer les coefficients $c_1, \ldots, c_{p-1}$ de

$$\omega' = c_1 \omega'_1 + c_2 \omega'_2 + \ldots + c_{p-1} \omega'_{p-1},$$

de manière qu'ils vérifient les équations

$$\omega'(\varepsilon_1) = a_1, \quad \ldots, \quad \omega'(\varepsilon_\alpha) = a_\alpha, \quad \ldots, \quad \omega'(\varepsilon_{p-1}) = a_{p-1},$$

où $a_1, \ldots, a_\alpha \ldots, a_{p-1}$ désignent des quantités arbitraires.

Supposons que ce soit fait; nous trouverons ainsi pour $c_1, \ldots, c_{p-1}$ des fonctions linéaires et homogènes des quantités a_α. La substitution en ω' de ces valeurs ainsi obtenues pour $c_1, \ldots, c_{p-1}$ nous donnera

$$(\gamma) \qquad \omega' = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p-1} a_\alpha \Omega'_\alpha,$$

les coefficients a_α étant des quantités arbitraires; les facteurs Ω'_α seront des intégrants de première espèce aux multiplicateurs inverses. Ces intégrants sont liés étroitement au système des $p-1$ points essentiels ε_α.

Soit, en effet, ε_μ un point quelconque du système des points ε_α; nous aurons

$$\omega'(\varepsilon_\mu) = a_\mu, \quad \text{et} \quad \omega'(\varepsilon_\mu) = \sum_{\alpha=1}^{p-1} a_\alpha \Omega'_\alpha(\varepsilon_\mu),$$

d'où

$$a_\mu = \sum_{\alpha=1}^{p-1} a_\alpha \Omega'_\alpha(\varepsilon_\mu).$$

De cette dernière relation nous déduisons immédiatement

1° $\Omega'_\mu(\varepsilon_\mu) = 1$, pour $\alpha = \mu$,

2° $\Omega'_\alpha(\varepsilon_\mu) = 0$, » $\alpha \gtrless \mu$.

Nous avons ainsi découvert un système singulier de $p-1$ intégrants de première espèce aux multiplicateurs inverses. Ces intégrants Ω'_α sont liés étroitement au système des $p-1$ points essentiels ε_α. Ω'_α est nul en tous les points $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$, à l'exception du seul point ε_α, pour lequel cet intégrant est égal à l'unité.

Revenons maintenant à l'équation

$$\sum_{k=1}^{q} G_k \omega'(\varepsilon_k) = 0,$$

ou

$$\sum_\alpha G_\alpha \omega'(\varepsilon_\alpha) + \sum_\beta G_\beta \omega'(\varepsilon_\beta) = 0,$$

qui nous a servi de point de départ dans notre classification des fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$. La substitution

$$\omega'(\varepsilon_\alpha) = a_\alpha, \qquad \omega'(\varepsilon_\beta) = \sum_\alpha a_\alpha \Omega'_\alpha(\varepsilon_\beta),$$

nous donnera

$$\sum_\alpha G_\alpha a_\alpha + \sum_\beta G_\beta \sum_\alpha a_\alpha \Omega'_\alpha(\varepsilon_\beta) = 0,$$

où

$$\sum_\alpha a_\alpha \left\{ G_\alpha + \sum_\beta G_\beta \Omega'_\alpha(\varepsilon_\beta) \right\} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\delta) \qquad G_\alpha = -\sum_\beta G_\beta \Omega'_\alpha(\varepsilon_\beta),$$

a_1, a_α, a_{p-1} étant des quantités arbitraires.

Si nous désignons par $t(0|\varepsilon_k)$ une intégrale de deuxième espèce, d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, toute fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ pourra être mise sous la forme

$$\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda} = \sum_\alpha G_\alpha t(0|\varepsilon_\alpha) + \sum_\beta G_\beta t(0|\varepsilon_\beta) + \varpi,$$

où w est une intégrale de première espèce d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$. En vertu de la relation δ, cette formule peut s'écrire

$$(\varepsilon)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda} = w - \sum_{\beta} G_\beta \varphi_\beta,\\ &\text{où}\\ &\qquad \varphi_\beta = \sum_{\alpha=1}^{p-1} \Omega'_\alpha(\varepsilon_\beta)\, t(0|\varepsilon_\alpha) - t(0|\varepsilon_\beta). \end{aligned}\right.$$

Ainsi que nous l'avons vu, p est le nombre minimum de pôles que possède une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ de seconde espèce. Soit $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ une fonction de deuxième espèce d'ordre p, aux multiplicateurs $m_\lambda n_\lambda$. Cette fonction pourra se mettre sous la forme

$$\Phi^{2}_{m_\lambda n_\lambda} = w - G\varphi,$$

où

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{p-1} \Omega'_\alpha(\varepsilon_p)\, t(0|\varepsilon_\alpha) - t(0|\varepsilon_p).$$

Nous pouvons disposer à notre aise du résidu G, qui figure dans cette formule. Supposons $G = -1$. Nous aurons, dans cette hypothèse,

$$(1)\qquad \text{Dans le voisinage de } \varepsilon_p\quad \Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda} = -\frac{1}{z-\varepsilon_p} + \text{fonct. cont.},$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\text{Dans le voisinage de } \varepsilon_1, && \Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda} = \Omega'_1(\varepsilon_p)\frac{1}{z-\varepsilon_1} + \text{fonct. cont.},\\ &\quad\text{»}\qquad \varepsilon_2, && \Phi^{(2)} = \Omega'_2(\varepsilon_p)\frac{1}{z-\varepsilon_2} + \text{fonct. cont.},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\quad\text{»}\qquad \varepsilon_{p-1}, && \Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda} = \Omega'_{p-1}(\varepsilon_p)\frac{1}{z-\varepsilon_{p-1}} + \text{fonct. cont.}, \end{aligned}\right.$$

Nous avons ainsi trouvé le théorème suivant :

Théorème VI. — *Si nous déterminons une fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ d'ordre p, de manière que son résidu au point fixe ε_p soit -1, cette fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ possédera aux $p-1$ pôles restants $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ des résidus égaux aux valeurs que prennent au point fixe ε_p les $p-1$ intégrants Ω' que nous avons trouvés précédemment.*

Ainsi que nous l'avons démontré, le cas général n'admet pour $p = 1$ aucune fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ de première espèce. Il est facile de prouver que pour $p = 1$ le cas général n'admet pas non plus de fonction de deuxième espèce. Pour $p = 1$, la relation

$$q - \rho = p - 1,$$

qui caractérise les fonctions de deuxième espèce, se réduit en effet à

$$q - \rho = 0;$$

le nombre des équations essentielles de système

$$\omega'(\varepsilon_1) = 0, \quad \ldots, \quad \omega'(\varepsilon_q) = 0$$

serait donc nul, ce qui est une absurdité. Les fonctions à multiplicateurs donnés, qui correspondent à la valeur 1 de p, rentrent, par conséquent, toutes dans le cas spécial de M. P. Appell. Nous allons donner brièvement la théorie de ce cas spécial.

II. — Cas spécial.

Comme on le sait, le cas spécial, que M. P. Appell sépare toujours soigneusement du cas général, a lieu toutes les fois que Φ est de la forme

$$\Phi_{m_\lambda n_\lambda} = \tau \mathcal{E}(z),$$

où τ désigne une fonction algébrique rationnelle en s et z, et $\mathcal{E}(z)$ la fonction exponentielle employée couramment par M. P. Appell. Ici encore nous distinguerons deux espèces de fonctions Φ. Nous dirons que $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ est de première ou de deuxième espèce suivant que τ est de première ou de deuxième espèce (*voir* le Mémoire de M. Christoffel).

Les fonctions de première espèce sont caractérisées par la relation

$$q - \rho = p - 1 - \lambda,$$

celles de deuxième espèce par la relation

$$q - \rho = p,$$

où ρ et λ désignent l'excès et le défaut du système d'équations

$$w'(\varepsilon_1) = 0, \quad \ldots, \quad w'(\varepsilon_q) = 0,$$

w' étant l'intégrant général de première espèce de Riemann.

Les théorèmes bien connus sur les systèmes de pôles d'une fonction algébrique se trouvent ainsi immédiatement démontrés pour la fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ correspondante. Quelques-uns de ces théorèmes sont énoncés dans le Mémoire déjà cité de M. Christoffel. Nous nous dispenserons de les reproduire ici.

[Voir commencement de ce Mémoire le Tome VIII].

éléments des diverses colonnes de D. Donc D serait nul identiquement, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Lorsque l'on a $D \neq 0$, les n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, qui sont appelées dans tous les cas des *intégrales de l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n*, forment alors un *système fondamental d'intégrales* de cette équation différentielle.

On a toujours

$$D = C e^{\int p_1 dx}, \tag{36}$$

puisque la somme Σa_{ii} se réduit à p_1 dans les équations (30).

Si le déterminant D est identiquement nul, il existe entre les intégrales y_1, $y_2, \ldots, y_n$ au moins une relation linéaire et homogène à coefficients constants. En effet, d'après le n° 11, il existe plus généralement n relations de la forme

$$C_1 \frac{d^k y_1}{dx^k} + \ldots + C_n \frac{d^k y_n}{dx^k} = 0$$

$$\left(\frac{d^0 y_i}{dx^0} = y_i;\ k = 0, 1, \ldots, n-1\right).$$

Entre $n+1$ intégrales il existe toujours une relation linéaire et homogène à coefficients constants. En effet, d'après le même numéro, on a plus généralement n relations de la forme

$$C_1 \frac{d^k y_1}{dx^k} + \ldots + C_{n+1} \frac{d^k y_{n+1}}{dx^k} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Nous énoncerons encore les théorèmes suivants :

α. *Toute intégrale d'une équation linéaire et homogène d'ordre n peut s'obtenir par une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des intégrales d'un système fondamental.*

β. *Si l'on substitue aux intégrales d'un système fondamental d'autres intégrales déterminées par les relations linéaires et homogènes à coefficients constants*

$$Y_i = C_{i1} y_1 + \ldots + C_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient un nouveau système d'intégrales à condition que le déterminant des constantes de la substitution soit différent de zéro.

Toutes ces propriétés peuvent se démontrer directement. Les démonstrations directes sont très connues, surtout depuis la publication du premier Mémoire de M. Fuchs sur les équations linéaires (1866).

24. Soit u une intégrale donnée de l'équation différentielle (27) et, par suite, soient

$$u, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$$

les éléments d'une solution du système

$$(30) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_1 y_1 + \dots + p_n y_n, \\ \dfrac{dy_k}{dx} = y_{k-1} \end{cases} \qquad (k = 2, 3, \dots, n).$$

Posons

$$y_n = y = uv,$$

d'où

$$y_{n-1} = \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

$$y_{n-2} = \frac{d^2y}{dx^2} = u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$y_1 = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = u\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \frac{n-1}{1}\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \dots + v\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}.$$

Portons ces valeurs dans les équations (30). Cherchons le coefficient de v dans la première équation (30) ramenée à la forme

$$\frac{dy_1}{dx} - p_1 y_1 - \dots - p_n y_n = 0.$$

Nous trouverons

$$\frac{d^n u}{dx^n} - p_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} - \dots - p_n u,$$

c'est-à-dire zéro, puisque u est une intégrale de l'équation (27).

Les autres équations (30) seront identiquement satisfaites, en vertu même de la définition de l'inconnue v.

Il résulte de là que, si l'on élimine les variables $y_1, y_2, \dots, y_n$, les équations (30) fourniront des équations où entreront les seules inconnues

$$\frac{dv}{dx}, \quad \frac{d^2v}{dx^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^n v}{dx^n},$$

et, par suite, en posant

$$\frac{dv}{dx} = t, \qquad \text{d'où} \qquad v = \int t\,dx,$$

on pourra prendre pour inconnues nouvelles t et ses dérivées. Nous poserons

$$t = t_{n-1},$$
$$\frac{dt}{dx} = t_{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d^{n-2}t}{dx^{n-2}} = t_1.$$

D'abord, chacune des équations (30) de la forme

$$\frac{dy_k}{dx} = y_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

étant identiquement satisfaite, il ne restera que la condition

$$\frac{dy_1}{dx} = p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n$$

ou

$$\left(\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)\right)^n = p_1\left(\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)\right)^{n-1} + \ldots + p_n uv.$$

Les doubles parenthèses indiquent des puissances symboliques. On a vu que le coefficient de v est identiquement nul, et qu'on peut prendre pour inconnues nouvelles $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$.

L'équation précédente prendra donc la forme

$$\frac{dt_1}{dx} = P_1 t_1 + \ldots + P_{n-1} t_{n-1}. \tag{37}$$

Il est facile de voir que l'on aura

$$P_1 = \frac{1}{u}\left[-\frac{n}{1}\frac{du}{dx} + p_1 u\right],$$
$$P_2 = \frac{1}{u}\left[-\frac{n(n-1)}{2}\frac{d^2u}{dx^2} + (n-1)p_1\frac{du}{dx} + p_2 u\right],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$P_{n-1} = \frac{1}{u}\left[-\frac{n(n-1)\ldots2.1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + p_1\frac{(n-1)\ldots3.2.1}{1.2\ldots(n-2)}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots + p_{n-1}u\right].$$

En conséquence, le système (30) sera ramené à un système de même forme renfermant une inconnue de moins, soit au système

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dt_1}{dx} = P_1 t_1 + \ldots + P_{n-1} t_{n-1}, & \\ \dfrac{dt_k}{dx} = t_{k-1} & (k = 1, 2, \ldots, n-2). \end{array}\right. \tag{38}$$

Mais on aura

$$\frac{d^{n-k-1}t}{dx^{n-k-1}} = t_k.$$

ce qui correspond à la formule (28).

Comparons ce résultat avec celui que donne la théorie générale. Remarquons d'abord que tous les éléments

$$u_n = u, \qquad u_{n-1} = \frac{du}{dx}, \qquad \ldots, \qquad u_1 = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$$

d'une solution du système (30) sont différents de zéro jusqu'à un certain ordre de dérivation, par exemple jusqu'à

$$\frac{d^{s-1}u}{dx^{s-1}} = u_{n-s+1},$$

et même ce cas ne se présentera que si u est un polynome d'un degré en x inférieur à $n-1$.

Dans la théorie générale, on pose

$$y_h = u_h q_h.$$

Par suite, les équations

$$\frac{dy_k}{dx} = y_{k-1}$$

deviennent

$$\frac{du_k}{dx} q_k + \frac{dq_k}{dx} u_k = u_{k-1} q_{k-1},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dq_k}{dx} = \frac{u_{k-1}}{u_k} q_{k-1} - \frac{1}{u_k} \frac{du_k}{dx} q_k.$$

En tenant compte de l'équation

$$\frac{du_k}{dx} = u_{k-1},$$

on a

(39) $$\frac{dq_k}{dx} = \frac{u_{k-1}}{u_k}(q_{k-1} - q_k) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

La première équation (30) devient

$$\frac{du_1}{dx} q_1 + \frac{dq_1}{dx} u_1 = p_1 u_1 q_1 + \ldots + p_n u_n q_n.$$

Par suite, à cause de l'équation

$$\frac{du_1}{dx} = p_1 u_1 + \ldots + p_n u_n,$$

on a

(40) $$\frac{dq_1}{dx} = p_2 \frac{u_2}{u_1}(q_2 - q_1) + \ldots + p_n \frac{u_n}{u_1}(q_n - q_1).$$

Si l'on pose ensuite

$$z_k = q_k - q_1,$$

on aura, en retranchant successivement l'équation (40) de chacune des équations (39), les équations

$$\frac{dz_k}{dx} = \frac{u_{k-1}}{u_k}(z_{k-1} - z_k) - p_2 \frac{u_2}{u_1} z_2 + \ldots - p_n \frac{u_n}{u_1} z_n \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

formant un système linéaire et homogène à $n-1$ inconnues, auquel il faudra joindre l'équation

$$\frac{dq_1}{dx} = p_2 \frac{u_2}{u_1} z_2 + \ldots + p_n \frac{u_n}{u_1} z_n.$$

Il est évident maintenant que la méthode qui est particulière aux équations (30) et qui conduit aux équations (38), *exactement de même forme* que les équations données, doit être préférée à la méthode générale qui conduit simplement à des équations linéaires et homogènes.

D'ailleurs, les équations (38) jouissent des mêmes propriétés que les équations en z de la théorie générale. En effet, nous pouvons montrer que si t_1, $t_2, \ldots, t_{n-1}$ forment un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$\frac{d^{n-1}t}{dx^{n-1}} = P_1 \frac{d^{n-2}t}{dx^{n-2}} + P_2 \frac{d^{n-3}t}{dx^{n-3}} + \ldots + P_{n-1} t,$$

les expressions

$$Y_1 = u, \qquad Y_2 = u \int t_1 \, dx, \qquad Y_n = u \int t_{n-1} \, dx$$

forment un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y.$$

En effet, s'il existait une relation linéaire et homogène à coefficients constants telle que

$$C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n = 0,$$

on en déduirait la relation

$$C_1 + C_2 \int t_1 \, dx + C_3 \int t_2 \, dx + \ldots + C_n \int t_{n-1} \, dx = 0,$$

d'où, en dérivant,

$$C_2 t_1 + C_3 t_2 + \ldots + C_n t_{n-1} = 0,$$

relation incompatible avec les hypothèses.

25. Résumons le paragraphe précédent. Si y_1 est une intégrale de l'équation différentielle linéaire et homogène

$$(27) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y,$$

la substitution

$$y = y_1 \int t\, dx$$

conduit à une équation

$$(41) \qquad \frac{d^{n-1} t}{dx^{n-1}} = P_1 \frac{d^{n-2} t}{dx^{n-2}} + \ldots + P_{n-1} t,$$

linéaire et homogène, d'ordre $n - 1$, et, avec un système fondamental d'intégrales de l'équation (41), on peut former un système fondamental d'intégrales de l'équation (27).

De l'équation

$$P_1 = -\frac{n}{y_1} \frac{dy_1}{dx} + p_1,$$

obtenue plus haut, on tire

$$\int P_1\, dx = -n \operatorname{Log} y_1 + \int p_1\, dx,$$

et, en appelant D_1 le déterminant D (équation 35), correspondant à l'équation (39), on voit qu'on aura

$$D_1 = C y_1^{-n} D.$$

De l'équation en t, au moyen d'une solution t_1, on passe à une équation en τ linéaire et homogène d'ordre $n - 2$, etc.

Soient $y_1, t_1, \tau_1, \ldots, \sigma$ les diverses intégrales supposées successivement connues, on voit facilement qu'on aura la relation

$$D = C y_1^n t_1^{n-1} \tau_1^{n-2} \ldots \sigma.$$

On peut voir dans le Mémoire de M. Fuchs les conséquences que l'on tire de cette dernière relation.

CHAPITRE II.

DES DIVISEURS ÉLÉMENTAIRES.

---

26. Représentons par [P], [Q] et [P, Q] les déterminants

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} pA_{11}+qB_{11} & \dots & pA_{1n}+qB_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ pA_{n1}+qB_{n1} & \dots & pA_{nn}+qB_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant [P, Q] est une fonction entière et homogène en p, q. Nous n'aurons à nous occuper que du cas où cette fonction est du degré n, et non pas d'un degré inférieur; nous supposerons donc que le degré est n.

Ce déterminant [P, Q] est alors un produit de n facteurs linéaires et homogènes, de la forme $ap + bq$ et distincts ou non.

Considérons au même point de vue les mineurs des divers ordres. Soit l_ϖ l'exposant du diviseur $ap + bq$ qui entre dans le plus grand commun diviseur de tous les mineurs d'ordre ϖ. Soit $l_{\varpi+1}$ l'exposant correspondant à l'ordre $\varpi + 1$. L'expression

$$(ap + bq)^{l_\varpi - l_{\varpi+1}}$$

a été appelée par M. Weierstrass *un diviseur élémentaire du déterminant* [P, Q].

27. Soit $ap + bq$ un quelconque des *diviseurs linéaires* de [P, Q]. Nous opposerons cette expression à celle de *diviseur élémentaire*, chacune de ces deux sortes de diviseurs correspondant à une décomposition spéciale du déterminant [P, Q], comme nous allons le montrer.

Les mineurs de l'ordre ϖ du déterminant [P, Q] sont du degré $n - \varpi$ en p et q et peuvent être décomposés en facteurs linéaires en p et q. Je dis d'abord que l'exposant l_ϖ d'un même diviseur linéaire $ap + bq$ ne peut aller qu'en décroissant quand l'indice ϖ augmente; sous la notation l_ϖ nous comprenons aussi l'exposant l_0 du même diviseur linéaire dans le déterminant [P, Q], considéré alors comme un mineur d'ordre zéro.

D'abord tout déterminant de degré $n - \varpi + 1$ peut être considéré comme une somme de termes dont chacun, abstraction faite du signe, est le produit d'un déterminant du degré $n - \varpi$ par un élément de [P, Q]. Donc, tout diviseur commun des mineurs de degré $n - \varpi$ doit être aussi un diviseur commun des

mineurs de degré $n - \varpi + 1$, et, par suite, aussi, de tous les mineurs de degrés supérieurs à $n - \varpi + 1$. En conséquence, si l'un des nombres l_0, l_1, l_2, ... est nul, tous les suivants sont nuls.

Ensuite, si l'on considère un mineur du degré $n - \varpi + 1$, ses dérivées partielles par rapport à p et à q peuvent être considérées comme des sommes de termes dont chacun est le produit d'un déterminant de degré $n - \varpi$ par un terme de [P] ou de [Q]; si donc les mineurs de degré $n - \varpi$ admettent le diviseur linéaire $ap + bq$ au degré l_ϖ, le mineur de degré $n - \varpi + 1$ et ses dérivées partielles du premier ordre admettront en commun ce diviseur linéaire au même degré l_ϖ. Il faut alors que le mineur de degré $n - \varpi + 1$ soit divisible par $(ap + bq)^{l_\varpi + 1}$.

Soit l_r le dernier exposant l qui ne soit pas nul. On aura les inégalités

$$l_0 > l_1 > l_2 > \ldots > l_r,$$

et l'on pourra poser

$$l_0 - l_1 = e_0, \quad l_1 - l_2 = e_1, \quad \ldots, \quad l_{r-1} - l_r = e_{r-1}, \quad l_r = e_r.$$

On aura alors

$$l_0 = e_0 + e_1 + \ldots + e_r$$

et

$$(ap + bp)^{l_0} = (ap + bq)^{e_0} (ap + bq)^{e_1} + \ldots + (ap + bq)^{e_r}.$$

Soient ensuite $a_1 p + b_1 q$, $a_2 p + b_2 q$, ..., $a_m p + b_m q$ les diviseurs linéaires distincts du déterminant [P, Q]. Soient l_0^1, l_0^2, ..., l_0^m leurs exposants. Décomposons ces nombres en éléments e d'après les règles précédentes, de sorte que l'on ait, par exemple,

$$l_0^i = e_0^i + e_1^i + \ldots + e_{r_i}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Le déterminant [P, Q] pourra être représenté par le produit

$$\Pi (a_i p + b_i q)^{e_j^i} \qquad \begin{cases} i = 1, 2, & \ldots, m, \\ j = 0, 1, & \ldots, r_i. \end{cases}$$

Chacun des facteurs de ce produit est, comme nous l'avons dit dès l'abord, un *diviseur élémentaire* du déterminant [P, Q].

On voit que *chaque diviseur élémentaire est essentiellement caractérisé par le rapport de deux coefficients a et b et par un exposant e.*

Nous montrerons dans la suite que chaque diviseur élémentaire est *indépendant* dans chacune de ses propriétés. Nous pourrons alors représenter tous les diviseurs élémentaires dans un ordre quelconque par la notation

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad (a_2 p + b_2 q)^{e_2}, \quad \ldots, \quad (a_\rho p + b_\rho q)^{e_\rho}.$$

Mais les indices 1, 2, ..., ρ n'indiqueront plus que les diviseurs linéaires

$a_1 p + b_1 q, \ldots, a_\rho p + b_\rho q$ soient nécessairement distincts. Plusieurs pourront être égaux entre eux. On aura de plus

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_\rho = n,$$

et le nombre ρ sera égal ou supérieur au nombre des diviseurs linéaires distincts.

28. Un diviseur élémentaire $(ap + bq)^e$ du déterminant $[P, Q]$ est dit simple ou multiple, suivant que son exposant e est égal ou supérieur à l'unité.

Si, par exemple, tous les diviseurs élémentaires fournis par un même diviseur linéaire sont *simples*, on voit que le déterminant $[P, Q]$ sera divisible par $(ap + bq)^{r+1}$; ses mineurs du premier ordre seront divisibles par $(ap + bq)^r, \ldots,$ ses mineurs de l'ordre r seront divisibles par $ap + bq$.

Si au contraire les diviseurs élémentaires fournis par un même diviseur linéaire ne sont pas tous simples, remarquons que nous aurons

$$\begin{aligned}
l_0 &= e_0 + e_1 + \ldots + e_r,\\
l_0 - e_0 = l_1 &= e_1 + \ldots + e_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
l_{\varpi-1} - e_{\varpi-1} = l_\varpi &= e_\varpi + \ldots + e_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
l_{r-1} - e_{r-1} = l_r &= e_r,
\end{aligned}$$

et nous voyons que le déterminant $[P, Q]$ et ses mineurs d'ordres successifs seront respectivement divisibles par

$$\begin{gathered}
(ap + bq)^{e_0 + e_1 + \ldots + e_r},\\
(ap + bq)^{e_1 + \ldots + e_r},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(ap + bq)^{e_r}.
\end{gathered}$$

Les ordres de multiplicité d'un diviseur $ap + bq$, considéré comme *diviseur linéaire*, ou comme *diviseur élémentaire*, sont, comme on le voit, deux nombres essentiellement distincts.

Ajoutons une remarque :

Il n'y a *jusqu'ici* entre les nombres $e_0, e_1, \ldots, e_r$ aucune relation nécessaire. Ce sont simplement des nombres entiers qui concourent à former les nombres l_r, $l_{r-1}, \ldots, l_0$, ces derniers nombres allant toujours en croissant, quand leur indice diminue.

29. Il y a un lien très étroit entre la théorie des formes bilinéaires et la théorie des diviseurs élémentaires, et c'est précisément l'application des théorèmes de l'une de ces théories aux théorèmes de l'autre qui nous conduira à des consé-

quences très importantes pour la théorie des équations linéaires. Nous allons, par suite, nous occuper de ces questions spéciales.

On dit que les deux expressions

$$\left.\begin{array}{l} P = \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \\ Q = \Sigma B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \end{array}\right\} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

sont *deux formes bilinéaires aux* $2n$ *variables* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Les déterminants de ces formes sont, par définition, les déterminants $[P]$ et $[Q]$.

Faisons les substitutions

$$x_i = \sum_j h_{ij} x'_j,$$
$$y_i = \sum_j k_{ij} y'_j,$$

aux déterminants de constantes H et K supposés tous deux différents de zéro.

Les formes

$$P(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_n) \quad \text{et} \quad Q(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_n)$$

ou, avec une notation plus simple, les formes

$$P(x \mid y) \quad \text{et} \quad Q(x \mid y)$$

deviendront

$$P'(x' \mid y') \quad \text{et} \quad Q'(x' \mid y').$$

Nous allons montrer que *les déterminants des deux formes*

$$pP + qQ \quad \text{et} \quad pP' + qQ'$$

admettent les mêmes diviseurs élémentaires.

30. Supposons que l'on ne fasse d'abord que la première substitution. Les formes

$$P(x \mid y) \quad \text{et} \quad Q(x \mid y)$$

deviendront

$$P_1(x' \mid y) \quad \text{et} \quad Q_1(x' \mid y).$$

Si ensuite on fait la seconde substitution, on obtiendra les formes

$$P'(x' \mid y') \quad \text{et} \quad Q'(x' \mid y').$$

Il suffit de démontrer que le déterminant de la forme

$$pP_1 + qQ_1$$

a les mêmes diviseurs élémentaires que le déterminant de la forme

$$pP + qQ;$$

car on passera, par le même procédé de démonstration, des diviseurs élémentaires de la forme

$$pP_1 + qQ_1$$

à ceux de la forme

$$pP' + qQ'.$$

On sait, d'après la théorie des déterminants, que l'on a

$$[P_1, Q_1] = [P, Q] \times H.$$

Donc déjà les diviseurs linéaires distincts des deux déterminants

$$[P_1, Q_1] \quad \text{et} \quad [P, Q]$$

sont les mêmes. Il reste à faire voir qu'ils fournissent les mêmes diviseurs élémentaires. Nous montrerons pour cela que, si un diviseur linéaire est facteur à un certain degré de multiplicité dans tous les mineurs d'un ordre donné de $[P, Q]$, il est aussi facteur au même degré de multiplicité dans les mineurs du même ordre de $[P_1, Q_1]$ et réciproquement.

Représentons les mineurs de degré μ des trois déterminants

$$[P, Q], \quad H, \quad [P_1, Q_1]$$

par

$$m_{\gamma\delta}, \quad \eta_{\gamma\delta}, \quad m'_{\gamma\delta},$$

γ et δ désignant deux combinaisons quelconques des nombres $1, 2, \ldots, n$ pris μ à μ. On a, d'après Cauchy [1], la relation

$$m'_{\gamma\delta} = \eta_{\gamma 1} m_{\delta 1} + \eta_{\gamma 2} m_{\delta 2} + \ldots + \eta_{\gamma c} m_{\delta c}.$$

Le nombre c est celui des combinaisons indiquées et est égal à

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}.$$

Si tous les mineurs $m_{\delta\gamma}$ admettent le même diviseur $(ap+bq)^l$, $m'_{\gamma\delta}$ admettra ce même diviseur pour toutes les valeurs qu'on peut donner à γ et δ.

Réciproquement, si tous les mineurs $m'_{\gamma\delta}$ admettent le même diviseur $(ap+bq)^l$,

---

(1) *Voir* la Note sur les déterminants.

il en sera de même des expressions

$$\eta_{\gamma 1} m_{\delta 1} + \ldots + \eta_{\gamma c} m_{\delta c}.$$

Mais le déterminant $\Sigma \eta_{11} \eta_{22} \ldots \eta_{cc}$ est une puissance de H et n'est pas nul (¹). Donc $m_{\delta_1}, \ldots, m_{\delta_c}$ admettent séparément le diviseur $(ap+bq)^l$, et pour toutes les valeurs que l'on peut donner à δ.

Enfin, si les mineurs d'un certain ordre de [P, Q] n'ont aucun diviseur commun, il en sera de même des mineurs du même ordre de $[P_1, Q_1]$, sans quoi l'on pourrait démontrer que les mineurs considérés dans [P, Q] ont contrairement à l'hypothèse un diviseur commun.

Il est donc prouvé que les diviseurs élémentaires du déterminant [P, Q] ne sont pas altérés par la double substitution

$$x_1, \ldots, x_n \mid x'_1, \ldots, x'_n, \quad \text{et} \quad y_1, \ldots, y_n \mid y'_1, \ldots, y'_n.$$

31. Ce théorème admet la réciproque suivante :

Soient deux couples de formes bilinéaires

$$P(x \mid y) \quad \text{et} \quad Q(x \mid y)$$

et

$$P'(x' \mid y'), \quad Q'(x' \mid y').$$

Si les deux déterminants [P, Q] *et* [P′, Q′] *ont les mêmes diviseurs élémentaires, on peut déterminer* $2n^2$ *constantes* h *et* k *telles que les substitutions*

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \sum_j h_{ij} x'_j \\ y_i &= \sum_j k_{ij} y'_j \end{aligned}\right\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

changent P *en* P′ *et* Q *en* Q′.

Nous démontrerons cette importante réciproque par une belle méthode due à M. Darboux.

32. Soit une forme bilinéaire aux $2n$ variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$

$$P = \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta.$$

Appelons $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les dérivées partielles de P par rapport à $x_1, x_2, \ldots,$

(¹) *Voir* la Note sur les déterminants.

x_n et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les dérivées partielles de P par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} X_i = A_{i1}y_1 + \ldots + A_{in}y_n \\ Y_i = A_{1i}x_1 + \ldots + A_{ni}x_n \end{array}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le déterminant formé par les n^2 coefficients A et qui a l'une des deux formes

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

est appelé le ***déterminant*** de la forme P.

On remarquera la relation

$$x_1X_1 + \ldots + x_nX_n = y_1Y_1 + \ldots + y_nY_n = P.$$

33. Appelons B_0 le déterminant de la forme P et formons toutes les expressions que peut donner le déterminant B_0 *bordé* comme nous allons l'indiquer. Posons

$$B_\theta = \left|\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & \ldots & A_{1n} & u_1^1 & \ldots & u_1^\theta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} & u_n^1 & \ldots & u_n^\theta \\ \hline v_1^1 & \ldots & v_n^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^\theta & \ldots & v_n^\theta & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right|.$$

Chaque bordure, la $k^{\text{ième}}$ par exemple, distinguée par l'indice supérieur k, est obtenue au moyen de $2n$ arbitraires formant deux groupes distincts, soient $u_1^k, \ldots, u_n^k$ pour la bordure en colonne et $v_1^k, \ldots, v_n^k$ pour la bordure en ligne.

Développons B_θ (¹) par la règle de *Laplace* (²) en combinant les éléments des θ dernières colonnes de toutes les manières possibles, de façon à former des mineurs de degré θ, et en multipliant chacun de ces mineurs par le mineur de degré n qui reste quand on a supprimé les θ dernières colonnes et les θ lignes choisies.

Les produits du degré $n + \theta$ que l'on obtient ainsi renferment des paramètres v provenant de toutes les bordures et sont du degré $n - \theta$ par rapport aux éléments du déterminant B_0. La même règle de Laplace est applicable à chaque mineur de degré n.

(¹) Les déterminants B_θ pourraient être appelés des *Hessiens bordés*.

(²) *Voir* la Note sur les déterminants.

Donc B_θ *est une fonction linéaire et homogène des mineurs d'ordre* θ *de* B_0 *quelles que soient les valeurs attribuées aux arbitraires u et v.*

34. Si l'on connaît le déterminant [P, Q], qu'on peut représenter par $B_0(p, q)$, on voit que la fonction $B_\theta(p, q)$ sera entière et homogène en p et q, et, si les mineurs de degré $n - \theta$ de $B_0(p, q)$ sont divisibles par $(ap + bq)^l$, on voit que $B_\theta(p, q)$ sera divisible par $(ap + bq)^l$. On peut d'ailleurs choisir les arbitraires qui entrent dans B_θ de manière qu'il se réduise à l'un quelconque des mineurs de B_0. Par exemple, on a

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,k+1} & \dots & A_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & . & \dots & . \\ A_{k+1,1} & \dots & A_{k+1,k+1} & \dots & A_{k+1,n} & 1 & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & . & \dots & . \\ A_{n1} & \dots & A_{n,k+1} & \dots & A_{nn} & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & \dots & A_{kk} \end{vmatrix}.$$

Donc, pour qu'un diviseur $(ap + bq)^l$ *soit commun à tous les mineurs d'ordre* θ *de* [P, Q], *il faut et il suffit qu'il divise la fonction* $B_\theta(p, q)$ *correspondante, quelles que soient les valeurs attribuées aux arbitraires.*

On pourrait en conséquence définir les diviseurs élémentaires de [P, Q] au moyen des déterminants $B_\theta(p, q)$.

35. La première forme B_θ est

$$B_1 = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & u_1^1 \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & u_n^1 \\ v_1^1 & \dots & v_n^1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En la développant, on a

$$B_1 = -\sum u_i^1 v_j^1 \frac{\partial B_0}{\partial A_{ij}}.$$

Si l'on retranche de la dernière colonne les autres multipliées par $y_1, y_2, \dots, y_n$, puis ensuite que l'on retranche de la dernière ligne les autres multipliées par x_1, $x_2, \dots, x_n$, on a

$$B_1 = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & & u_1^1 - X_1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots\dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & & \\ v_1^1 - Y_1 & \dots & v_n^1 - Y_n & \dots & -(u_1^1 x_1 + \dots + u_n^1 x_n) - (v_1^1 y_1 + \dots + v_n^1 y_n) + (x_1 X_1 + \dots + x_n X_n) \end{vmatrix}.$$

Si l'on remplace alors les arbitraires u et v par les dérivées X, Y de la forme bilinéaire P, on aura

$$B_1 = - B_0 P.$$

Cette formule permet d'exprimer P en fonction de B_1 et de B_0.

36. La fonction $B_{\theta+1}$ est liée à la fonction B_θ par la relation simple

$$B_{\theta+1} = -\sum u_i^{\theta+1} v_j^{\theta+1} \frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}}.$$

37. La dernière fonction B_θ est B_n, car toutes les fonctions suivantes $B_{n+n'}$ se réduiraient à zéro.

On a

$$B_n = (-1)^n \begin{vmatrix} u_1^1 & \dots & u_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n^1 & \dots & u_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1^n & \dots & v_n^n \end{vmatrix}.$$

38. Étant donné un déterminant quelconque

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

on démontre, dans la théorie des déterminants (¹), que l'on a toujours

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{rs}} \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{r_1 s_1}} - \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{r_1 s}} \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{r s_1}} = \Delta \frac{\partial^2\Delta}{\partial\alpha_{rs}\,\partial\alpha_{r_1 s_1}}.$$

Cette proposition va nous être du plus grand secours dans le calcul que nous allons entreprendre.

Nous appliquerons ce théorème à des fonctions telles que B_θ, que nous représenterons par la notation

$$B(u^1, \dots, u^\theta; v^1, \dots, v^\theta),$$

ou par la notation

$$B(u^\theta; v^\theta),$$

en n'indiquant que les éléments les plus indispensables.

Introduisons dans notre calcul l'expression

$$R_\theta = B(u^{n-\theta}, X; v^{n-\theta}, Y),$$

(¹) *Voir* la Note sur les déterminants.

qui se tire de $B_{n-\theta+1}$ en remplaçant les éléments de la dernière bordure par les dérivées partielles de la forme P.

Nous aurons

$$R_0 = B(u^n, X; v^n, Y) = 0.$$

Appliquons le théorème rappelé plus haut à l'expression R_θ, nous aurons

$$B(u^{n-\theta}; v^{n-\theta})\,B(u^{n-\theta-1}, X; v^{n-\theta-1}, Y) - B(u^{n-\theta-1}, X; v^{n-\theta})\,B(u^{n-\theta}; v^{n-\theta-1}, Y)$$
$$= B(u^{n-\theta-1}; v^{n-\theta-1})\,B(u^{n-\theta}, X; v^{n-\theta}, Y),$$

et, si nous posons

$$B(u^{n-\theta-1}, X; v^{n-\theta}) = U_{\theta+1},$$
$$B(u^{n-\theta}; v^{n-\theta-1}, Y) = V_{\theta+1},$$

nous aurons la formule

$$R_{\theta+1} B_{n-\theta} - U_{\theta+1} V_{\theta+1} = B_{n-\theta-1} R_\theta,$$

ou, en changeant θ en $\theta - 1$,

$$R_\theta B_{n-\theta+1} - U_\theta V_\theta = B_{n-\theta} R_{\theta-1}.$$

Appliquons cette formule plusieurs fois de suite et ajoutons à ces résultats une identité déjà démontrée, nous aurons

$$\begin{aligned}
&R_1 B_n \quad - U_1 V_1 = 0,\\
&R_2 B_{n-1} - U_2 V_2 = R_1 B_{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&R_n B_1 \quad - U_n V_n = R_{n-1} B_0,\\
&P\ B_0 \qquad\quad = - R_n.
\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire ces équations sous la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{R_1}{B_{n-1}} = \frac{U_1 V_1}{B_n B_{n-1}},\\
&\frac{R_2}{B_{n-2}} = \frac{U_2 V_2}{B_{n-1} B_{n-2}} + \frac{R_1}{B_{n-1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{R_n}{B_0} = \frac{U_n V_n}{B_1 B_0} + \frac{R_{n-1}}{B_1},\\
&-P = \frac{R_n}{B_0},
\end{aligned}$$

et, en ajoutant, nous aurons la relation

$$(42)\qquad P = -\frac{U_1 V_1}{B_n B_{n-1}} - \frac{U_2 V_2}{B_{n-1} B_{n-2}} - \ldots - \frac{U_n V_n}{B_1 B_0}.$$

39. Les fonctions U_θ et V_θ sont respectivement des fonctions linéaires des X et des Y, et ne *renferment respectivement que les variables* $y_1, \ldots, y_n$ ou $x_1, \ldots, x_n$.

Les expressions B_θ sont des constantes qui dépendent des valeurs attribuées aux arbitraires u et v. *Nous concluons de là qu'il y a une infinité de manières de ramener une forme linéaire* (P) *à la forme*

$$\sum_\alpha A'_{\alpha\alpha} x'_\alpha y'_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{43}$$

Cette proposition correspond à la réduction d'une forme quadratique à une somme de carrés.

40. Mais le calcul précédent n'est valable que si les dénominateurs ne sont pas nuls. On peut toujours se placer dans ce cas si B_0 n'est pas nul, comme nous en ferons toujours l'hypothèse.

En effet, on a

$$B_{\theta+1} = -\Sigma u_i^{\theta+1} v_j^{\theta+1} \frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}},$$

et l'on peut choisir les arbitraires $u^{\theta+1}$ et $v^{\theta+1}$ de manière que $B_{\theta+1}$ se réduise à un mineur quelconque $\frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}}$ de B_θ (*voir* § 34). Tous les mineurs $\frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}}$ ne sont pas nuls si B_θ n'est pas identiquement nul, car B_θ et son déterminant adjoint ne peuvent être nuls l'un sans l'autre ([1]).

Donc, si B_0 n'est pas identiquement nul, on peut choisir les arbitraires u^1, v^1 de manière que B_1 ne soit pas identiquement nul, puis les arbitraires u^2, v^2 de manière que B_2 ne soit pas identiquement nul, etc.

41. Si B_0 n'est pas nul, les fonctions $U_1, \ldots, U_n$, ou les fonctions $V_1, \ldots, V_n$, sont linéairement indépendantes.

En effet, dans le cas contraire, on pourrait par exemple poser

$$U_i = C_{i1} T_1 + \ldots + C_{ik} T_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k < n),$$

les nouvelles variables T étant indépendantes.

De là on conclurait par l'élimination de ces variables $n - k$ relations linéaires et homogènes entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Or, si l'on considère les dérivées partielles de P,

$$Y_i = a_{1i} x_1 + \ldots + a_{ni} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

([1]) *Voir* la Note sur les Déterminants.

et l'une quelconque de ces $n-k$ relations

$$m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n = 0;$$

on pourrait éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et l'on obtiendrait un résultat de la forme

$$C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n = 0.$$

Ce résultat est incompatible avec l'indépendance linéaire des fonctions Y, indépendance caractérisée par la condition

$$B_0 \neq 0.$$

En résumé, la forme P peut être ramenée, d'une infinité de manières, à la forme (43), et il *sera impossible de diriger le calcul de façon que cette forme* (43) *renferme moins de variables indépendantes que* P.

42. Appliquons maintenant les principes précédents à la forme complexe

$$F = fs + \varphi,$$

où s est une indéterminée et où l'on a

$$f = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$
$$\varphi = \Sigma b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta.$$

Nous supposerons que le déterminant de la forme f n'est pas nul. Par suite, le déterminant de la forme F, c'est-à-dire

$$B_0(s) = \begin{vmatrix} a_{11}s + b_{11} & \ldots & a_{1n}s + b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}s + b_{n1} & \ldots & a_{nn}s + b_{nn} \end{vmatrix},$$

ne sera pas nul non plus. Ce déterminant sera même de degré n par rapport à s.

Appliquons-lui le théorème de Gauss démontré au § 35. Nous aurons, avec la notation du § 38,

$$F = fs + \varphi = \frac{-B(X:Y)}{B_0(s)} = F(X, Y, s);$$

de sorte que s entrera dans F explicitement d'abord, puis implicitement par les X et les Y. Si l'on considère pour un moment les X et les Y comme des arbitraires, F se présentera sous la forme d'une fraction rationnelle en s, dont le dénominateur est du degré n et dont le numérateur est au plus du degré $n-1$. Mais, si X et Y sont les dérivées partielles de F, le numérateur pourra être du degré $n+1$.

Décomposons cette fraction rationnelle en une somme de n fractions simples,

en nous servant de la règle de Lagrange qui consiste à chercher, pour une racine s_i de $B_0(s) = 0$, le coefficient de $\frac{1}{\sigma}$ dans le développement de $\frac{F(s_i+\sigma)}{s - s_i - \sigma}$ (1).

Nous donnerons d'abord à F la forme générale

$$F = -\frac{U_1 V_1}{B_n B_{n-1}} - \ldots - \frac{U_n V_n}{B_1 B_0},$$

et nous raisonnerons, sur un terme quelconque divisé par $s - s_i - \sigma$,

$$-\frac{U_{n-\theta+1} V_{n-\theta+1}}{(s - s_i - \sigma) B_\theta B_{\theta-1}}.$$

On a d'abord, avec les notations du § 38,

$$U_{n-\theta+1} = B(u^{\theta-1}, X;\ v^{\theta-1}) = \begin{vmatrix} a_{11}s + b_{11} & \ldots & a_{1n}s + b_{1n} & u_1^1 & \ldots & u_1^{\theta-1} & X_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}s + b_{n1} & \ldots & a_{nn}s + b_{nn} & u_n^1 & \ldots & u_n^{\theta-1} & X_n \\ v_1^1 & \ldots & v_n^1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^\theta & \ldots & v_n^\theta & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut remplacer la dernière colonne par une autre, obtenue en retranchant de celle-ci les n premières colonnes multipliées par $y_1, y_2, \ldots, y_n$. La nouvelle colonne, écrite horizontalement pour la commodité de l'écriture, devient

$$X_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad X_n - \frac{\partial F}{\partial x_n}, \quad -(v_1^1 y_1 + \ldots + v_n^1 y_n), \quad \ldots, \quad -(v_1^\theta y_1 + \ldots + v_n^\theta y_n).$$

Nous devons remplacer s par $s_i + \sigma$ dans $U_{n-\theta+1}$. Nous aurons alors

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = (s_i + \sigma)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

de sorte que, si maintenant nous supposons que X est la dérivée partielle de F, la dernière colonne deviendra

$$(s - s_i - \sigma)\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad (s - s_i - \sigma)\frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad U^1, \ldots, U^\theta,$$

et le déterminant, développé par rapport aux éléments de cette colonne, prendra la forme

$$U_{n-\theta+1} = (s - s_i - \sigma) M_1 + M_2.$$

(1) *Voir* la Note sur la Règle de Lagrange.

Les coefficients de $U^1, \ldots, U^\theta$ sont des fonctions linéaires des mineurs d'ordre $\theta - 1$ de B_0, de sorte que M_2 est au moins divisible par la même puissance de σ que $B_{\theta-1}$.

Quant à M_1 il est égal à $U_{n-\theta+1}$, quand on a remplacé $X_1, \ldots, X_n$ par

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

C'est donc une forme de B_θ et il est au moins divisible par la même puissance de σ que B_θ.

Soient l_θ et $l_{\theta-1}$ les exposants de σ dans B_θ et $B_{\theta-1}$. On sait que l'on a

$$l_{\theta-1} > l_\theta.$$

Posons dès lors

$$l_{\theta-1} - l_\theta = e_{\theta-1},$$

ou, pour simplifier l'écriture, posons simplement

$$l_{\theta-1} - l_\theta = e.$$

On voit que e est l'exposant d'un diviseur élémentaire correspondant au diviseur linéaire $s - s_i$ de $B_0(s)$.

On pourra donc écrire

$$U_{n-\theta+1} = (s - s_i - \sigma)\,\sigma^{l_\theta} M'_1 + \sigma^{l_{\theta-1}} M'_2,$$

M'_1 et M'_2 n'étant plus divisibles par σ. On aura, en outre,

$$\begin{aligned} B_\theta \quad &= \sigma^{l_\theta} \;\; B'_\theta, \\ B_{\theta-1} &= \sigma^{l_{\theta-1}} B'_{\theta-1}; \end{aligned}$$

B'_θ et $B'_{\theta-1}$ sont deux quantités ne renfermant plus σ en facteur.

Cela posé, l'expression

$$-\frac{U_{n-\theta+1} V_{n-\theta+1}}{(s - s_i - \sigma) B_\theta B_{\theta-1}}$$

devient

$$-\frac{(s - s_i - \sigma)\,\sigma^{2 l_\theta} M'_1 N'_1}{\sigma^{l_\theta + l_{\theta-1}} B'_\theta B'_{\theta-1}} + \ldots,$$

en appelant N'_1 la quantité analogue à M'_1 provenant du calcul de $V_{n-\theta+1}$, et *en négligeant d'écrire les termes qui ne donnent pas de puissances négatives de σ.*

On peut encore écrire

$$-\frac{s - s_i - \sigma}{\sigma^e} \frac{M'_1}{\sqrt{B'_\theta B'_{\theta-1}}} \frac{N'_1}{\sqrt{B'_\theta B'_{\theta-1}}}.$$

Or M'_1 renferme linéairement $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et N'_1 renferme linéairement $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il en sera de même des coefficients de leurs développements par rapport à σ. Soient

$$\frac{M'_1}{\sqrt{B'_\theta B'_{\theta-1}}} = \xi_0 + \xi_1\sigma + \xi_2\sigma^2 + \ldots + \xi_m\sigma^m + \ldots,$$
$$\frac{N'_1}{\sqrt{B'_\theta B'_{\theta-1}}} = \eta_0 + \eta_1\sigma + \eta_2\sigma^2 + \ldots + \eta_m\sigma^m + \ldots.$$

Le coefficient de $\frac{1}{\sigma}$ que nous cherchons sera donc

$$-(s-s_i)(\xi_0\eta_{e-1} + \ldots + \xi_{e-1}\eta_0) + (\xi_0\eta_{e-2} + \ldots + \xi_{e-2}\eta_0).$$

Nous poserons, pour simplifier,

$$\xi_0\eta_{e-1} + \ldots + \xi_{e-1}\eta_0 = (\xi\eta)_e.$$

Nous voyons ainsi que, étant choisie la racine s_i, les termes successifs du développement de $\frac{F(s_i+\sigma)}{s-s_i-\sigma}$ nous donneront

$$-(s-s_i)(\xi\eta)_{e_0} + (\xi\eta)_{e_0-1},$$
$$-(s-s_i)(\xi\eta)_{e_1} + (\xi\eta)_{e_1-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour une autre racine s'_i nous aurions

$$-(s-s'_i)(\xi\eta)_{e'_0} + (\xi\eta)_{e'_0-1},$$
$$-(s-s'_i)(\xi\eta)_{e'_1} + (\xi\eta)_{e'_1-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Au lieu de réunir tous ces résultats en considérant les diviseurs linéaires $s-s_i$, $s-s'_i, \ldots$, considérons les diviseurs élémentaires

$$(s-s_1)^{e_1}, \quad (s-s_2)^{e_2}, \quad \ldots, \quad (s-s_\rho)^{e_\rho},$$

et il importe peu que les diviseurs linéaires correspondants soient distincts ou non, nous aurons, en ajoutant tous les résultats obtenus,

$$F = fs + \varphi = -\sum_{i=1}^{i=\rho}[(s-s_i)(\xi\eta)_{e_i} - (\xi\eta)_{e_i-1}].$$

On voit donc que chaque diviseur élémentaire fournit son terme dans le déve-

loppement de F. C'est en cela que consiste l'indépendance des rôles de ces diviseurs élémentaires dans le calcul que nous venons de faire.

43. De la formule précédente on tire

$$(44)\qquad \begin{cases} f = -\Sigma(\xi\eta)_e, \\ \varphi = \quad \Sigma s_i(\xi\eta)_e + \Sigma(\xi\eta)_{e-1}. \end{cases}$$

Il faut remarquer que l'on doit poser

$$(\xi\eta)_{e-1} = 0 \qquad \text{pour} \qquad e = 0.$$

44. Les expressions ξ sont des fonctions linéaires et homogènes de $y_1, \ldots, y_n$ et les expressions η sont des fonctions analogues des $x_1, \ldots, x_n$.

Nous allons montrer qu'on peut réciproquement exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en fonctions linéaires et homogènes des η et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en semblables fonctions des ξ.

En effet, de l'équation

$$f = -\Sigma(\xi\eta)_e,$$

on tire

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi_\mu} &= -\eta_\nu, \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_\nu} &= -\xi_\mu, \end{aligned}\right\} \qquad (\mu + \nu = e - 1)$$

et, par conséquent, le déterminant de la forme $\Sigma(\xi\eta)_e$ est égal à

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1- & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

et n'est pas nul. Appelons δ ce déterminant.

Si l'on fait le changement de variables qui change les ξ en y et les η en x, le déterminant δ sera multiplié par les deux déterminants de substitution que nous appellerons δ_x et δ_y. Mais, quand les variables sont x et y, le déterminant de $\Sigma(\xi\eta)_e$ est celui de f et est supposé différent de zéro. Soit δ_1 ce déterminant, on a la relation

$$\delta_1 = \delta\delta_x\delta_y,$$

d'où l'on conclut que δ_x et δ_y ne peuvent être nuls et, par suite, qu'on peut exprimer les x en η et les y en ξ.

En outre, puisque les déterminants δ_x et δ_y ne sont pas nuls, il y a bien n fonctions ξ et n fonctions η.

45. Les formules (44) ont été données par M. Weierstrass. L'éminent analyste leur a donné encore une autre forme plus symétrique que la précédente et que nous allons indiquer.

Soient g, h, g', h' quatre nombres, entiers si l'on veut, tels que le déterminant $gh' - hg'$ soit égal à l'unité, et posons

$$f = -(gP + hQ),$$
$$\varphi = \quad g'P + h'Q,$$
$$F = -(fs + \varphi) = [(gP + hQ)s - (g'P + h'Q)].$$

Nous tirerons de là

$$F = (gs - g')P + (hs - h')Q = pP + qQ,$$

en posant

$$gs - g' = p,$$
$$hs - h' = q.$$

Nous aurons, en outre,

$$ap + bq = (ag + bh)s - (ag' + bh').$$

Supposons que $ap + bp$ soit un diviseur du déterminant [P, Q] et remplaçons a et b par des valeurs proportionnelles, de sorte que l'on ait

$$ag + bh = 1,$$
$$ag' + bh' = s_i,$$

nous aurons

$$ap + bq = s - s_i.$$

Il résulte de là que les diviseurs élémentaires du déterminant de la forme $F = pP + qQ$ correspondront aux diviseurs de la forme $F = -(fs + \varphi)$. Si l'on résout alors le système d'équations

$$ag + bh = 1,$$
$$ag' + bh = s_i,$$

on aura, en introduisant un indice pour a et b,

$$a_i = h' - hs_i, \qquad b_i = -g' + gs_i.$$

Enfin les équations

$$gP + hQ = -f,$$
$$g'P + h'Q = \varphi$$

donneront

$$P = -h'f - h\varphi = \sum (a_i + hs_i)(\xi\eta)_{e_i} - h\sum s_i(\xi\eta)_{e_i} - h\sum (\xi\eta)_{e_i-1},$$

$$Q = \quad g'f + g\varphi = \sum (b_i - gs_i)(\xi\eta)_{e_i} + g\sum s_i(\xi\eta)_{e_i} + g\sum (\xi\eta)_{e_i-1},$$

ou enfin

$$(45) \qquad \begin{cases} P = \sum_i [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}], \\ Q = \sum_i [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}]. \end{cases}$$

46. On voit donc que, *si* P *et* Q *sont deux formes bilinéaires telles que le déterminant* [P, Q] *ne soit pas identiquement nul, si g et h sont deux constantes quelconques, telles que le déterminant de la forme* $gP + hQ$ *ne soit pas nul, et enfin si* $(a_ip + b_iq)^{e_i}$ *est un diviseur élémentaire quelconque du déterminant* [P, Q], *on pourra poser les formules* (45).

47. Le coefficient de s^n dans [P, Q] est la valeur de [P, Q] pour $p = g, q = h$; en le représentant par $[g, h]$, nous aurons

$$[P, Q] = [g, h]\prod_i (a_ip + b_iq)^{e_i} = [g, h]\prod_i (s - s_i)^{e_i}.$$

48. A un exposant e_i correspond dans P un nombre e_i de termes multipliés par a_i et un nombre $e_i - 1$ de termes multipliés par h. Donc à un exposant e_i correspondent $2e_i - 1$ termes dans P, et de même $2e_i - 1$ termes dans Q, lorsqu'on donne à P et à Q les formes (45) qu'on peut appeler *canoniques*.

Si l'on a $e_i = 1$, le nombre des termes dans P ou Q se réduit à l'unité.

Si tous les nombres e_i se réduisent à l'unité, on aura le cas le plus simple des formules (45) sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} P = \Sigma a_i\xi_i\eta_i, \\ Q = \Sigma b_i\xi_i\eta_i, \end{array}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans tous les cas, on pourra un peu simplifier les formules (44) en posant

$$g = 1, \qquad h = 0, \qquad g' = 0, \qquad h' = 1$$

si [P] n'est pas nul, et

$$g = 0, \qquad h = -1, \qquad g' = 1, \qquad h' = 0$$

si [Q] n'est pas nul.

49. *En résumé, étant données deux formes bilinéaires* P *et* Q, *si le déter-*

minant de la forme $pP + qQ$ *a* ρ *diviseurs élémentaires*

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad \ldots, \quad (a_\rho p + b_\rho q)^{e_\rho},$$

et il importe peu que les binomes $(a_1 p + b_1 q), \ldots, (a_\rho p + b_\rho q)$ *soient distincts ou non, on peut déterminer n fonctions linéaires et homogènes des* y, *soient*

$$\xi_0^i, \quad \xi_1^i, \quad \ldots, \quad \xi_{e_i-1}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

et n fonctions linéaires et homogènes des x, *soient*

$$\eta_0^i, \quad \eta_1^i, \quad \ldots, \quad \eta_{e_i-1}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

telles que, pour des valeurs données des constantes g et h et pour des valeurs convenables des rapports $\frac{a_i}{b_i}$, *on puisse construire les nouvelles formes*

$$P = \sum_i [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$Q = \sum_i [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

et, réciproquement, on pourra exprimer les x et les y au moyen des ξ *et des* η *de manière à reproduire les formes primitives.*

50. Soient maintenant deux couples de formes bilinéaires

$$P(x|y), \qquad Q(x|y)$$

et

$$P'(x'|y'), \qquad Q'(x'|y'),$$

et supposons que les deux déterminants $[P, Q]$ et $[P', Q']$ aient les mêmes diviseurs élémentaires.

Nous déterminerons, d'une part, n fonctions linéaires et homogènes de y_1, $y_2, \ldots, y_n$, soient ξ_μ^i $(i = 1, 2, \ldots, \rho;\ \mu = 0, 1, \ldots, e_i - 1)$, et n fonctions linéaires et homogènes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soient η_ν^i

$$(i = 1, 2, \ldots, \rho; \qquad \nu = 0, 1, \ldots, e_i - 1);$$

et, d'autre part, n fonctions semblables $\xi_\mu'^i$ de $y'_1, \ldots, y'_n$ et n fonctions semblables $\eta_\nu'^i$ de $x'_1, \ldots, x'_n$, telles que l'on puisse mettre P, Q, P', Q' en employant les mêmes valeurs de g, h, a, b sous les formes

$$P = \sum_i [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$Q = \sum_i [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$P' = \sum [a_i(\xi'\eta')_{e_i} - h(\xi'\eta')_{e_i-1}],$$

$$Q' = \sum [b_i(\xi'\eta')_{e_i} + g(\xi'\eta')_{e_i-1}].$$

Il est évident que P et P', Q et Q' ne différeront que par la notation et se transformeront les unes dans les autres quand on posera

$$\xi' = \xi, \qquad \eta' = \eta.$$

Mais ces équations sont des relations entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ d'une part, et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ d'autre part. On a vu qu'on peut les résoudre soit par rapport aux x et aux y, soit par rapport aux x' et aux y'. En outre, les formes P, Q, P', Q', une fois qu'on a choisi g et h, ne dépendent que des diviseurs élémentaires de [P, Q] et de [P', Q']. On a donc ce théorème, qui est la conclusion de tous ceux qui précèdent :

Pour que deux formes bilinéaires P *et* Q *se changent simultanément en deux autres* P' *et* Q' *au moyen de substitutions convenables des* x' *aux* x *et des* y' *aux* y, *il faut et il suffit que les déterminants des deux formes*

$$pP + qQ \qquad \text{et} \qquad pP' + qQ'$$

aient les mêmes diviseurs élémentaires.

51. Pour appliquer le théorème général précédent, il n'est pas nécessaire de décomposer effectivement les deux déterminants [P, Q], [P', Q'] en diviseurs élémentaires.

Si l'on considère les formes $fs + \varphi$, $fs' + \varphi'$, on déterminera, pour chaque ordre de mineurs, les plus grands communs diviseurs de ces mineurs. En leur supposant un coefficient égal à l'unité, et en les appelant

$$\begin{array}{llll} R_0(s), & R_1(s), & R_2(s), & \ldots, \\ R'_0(s), & R'_1(s), & R'_2(s), & \ldots, \end{array}$$

l'indice o correspondant au déterminant principal et l'indice k aux mineurs d'ordre k, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait identiquement

$$R_k(s) = R'_k(s) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

52. Il sera encore utile pour la suite de démontrer directement que les formes (45)

$$P = \sum [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$Q = \sum [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

obtenues précédemment, et où l'on a

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_\rho = n,$$
$$g a_i + h b_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

admettent bien les diviseurs élémentaires $(a_i p + b_i q)^{e_i}$.

53. Posons

$$P_i = a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i - 1},$$
$$Q_i = b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i - 1},$$

nous aurons

$$p P_i + q Q_i = (a_i p + b_i q)(\xi\eta)_{e_i} + (gq - hp)(\xi\eta)_{e_i - 1}.$$

Soient alors

$$a_i p + b_i q = u_i, \qquad gq - hp = v;$$

u_i et v sont deux variables indépendantes avec p et q puisque le déterminant $g a_i + h b_i$ n'est pas nul.

Par suite, le déterminant de la forme $pP_i + qQ_i$ peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & v & u_i \\ 0 & 0 & \ldots & v & u_i & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & v & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ v & u_i & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ u_i & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si nous cherchons de même le déterminant de la forme $pP + qQ$, en posant

$$P = \sum_i P_i, \qquad Q = \sum_i Q_i, \qquad a_i p + b_i q = u_i,$$

nous trouverons

$$(46) \qquad [P, Q] = \left|\begin{array}{ccccc|ccccc|c} 0 & 0 & \ldots & v & u_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots \\ v & u_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ u_1 & 0 & \ldots & \cdot & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & v & u_2 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & u_2 & 0 & \ldots \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & v & u_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & u_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \hline \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots \end{array}\right|$$

et nous en conclurons que l'on doit avoir

$$[P, Q] = \prod [P_i, Q_i].$$

Or, on a évidemment $[P_i, Q_i] = \pm u^{e_i}$, et u^{e_i} sera le seul diviseur élémentaire de $[P_i, Q_i]$, car, si l'on efface la dernière ligne et la dernière colonne de ce déterminant, on a un mineur du premier ordre égal à $\pm v^{e_i-1}$. Mais v est indépendant de u_i, et v^{e_i-1} ne peut être divisé par u_i.

Si l'on a $e_i = 1$, u_i est évidemment le seul diviseur élémentaire de $[P_i, Q_i]$ qui se réduit dans ce cas particulier à un seul terme, le terme u_i.

On aura ensuite

$$[P, Q] = \pm u_1^{e_1} u_2^{e_2} \dots u_\rho^{e_\rho} = \prod_i (a_i p + b_i q)^{e_i}.$$

On en conclut que les diviseurs élémentaires de $[P, Q]$ ne pourront être que les puissances des diviseurs linéaires $a_i p + b_i q$. Il reste à déterminer leurs exposants.

54. Cherchons les déterminants d'ordre ϖ de $[P, Q]$. Chacun d'eux répond à une suppression de ϖ lignes et ϖ colonnes dans le déterminant principal. Si l'on observe la forme de $[P, Q]$, on reconnaît qu'il est composé de déterminants partiels ayant en commun la diagonale principale avec $[P, Q]$ lui-même. C'est ce que l'on a indiqué par des barres sur la figure (46) de ce déterminant $[P, Q]$.

Supposons que l'on supprime ϖ lignes et ϖ colonnes, et, pour fixer les idées, supposons que les k premières lignes et les k' premières colonnes du mineur obtenu renferment les éléments non nuls qui restent après cette suppression dans le premier déterminant partiel $[P_i, Q_i]$, k étant $\gtrless k'$, $k' > k$ par exemple.

Dans un terme quelconque du développement du mineur de $[P, Q]$ entreront nécessairement un élément non nul de la première ligne, un élément non nul de la deuxième, etc., et ces éléments ne pourront appartenir qu'aux k' premières colonnes, les autres colonnes ne pouvant fournir que des éléments nuls dans les lignes considérées. Mais il restera encore $k' - k$ des premières colonnes dans lesquelles il faudra prendre un élément en dehors des k premières lignes. Cet élément sera nul. Nous concluons de là que les seuls mineurs de $[P, Q]$ qui ne sont pas nuls ont la diagonale principale commune avec $[P, Q]$ lui-même.

Étant autorisés à ne considérer que les mineurs de $[P, Q]$ qui ont la même diagonale principale que ce déterminant, représentons par $[P_i, Q_i]^{(m_i)}$ l'un des mineurs d'ordre m du déterminant $[P_i, Q_i]$ ou ce déterminant lui-même si $m = 0$.

Tous les mineurs non nuls d'ordre ϖ de $[P, Q]$ pourront être mis sous la forme

$$\prod_i [P_i, Q_i]^{(m_i)},$$

où l'on suppose

$$\sum_i m_i = \varpi.$$

55. Cela posé, soit $ap + bq$ un quelconque des diviseurs linéaires de $[P, Q]$, et soient, tirés de ceux des déterminants $[P_i, Q_i]$ divisibles par $ap + bq$, les diviseurs $(ap + bq)^{e_0}$, $(ap + bq)^{e_1}$, ..., $(ap + bq)^{e_r}$ qui représentent tous les diviseurs élémentaires correspondants de ces déterminants.

Nous supposerons que les nombres e_0, e_1, ..., e_r n'aillent pas en croissant.

Si nous prenons $m_i = 1$, pour les valeurs $0, 1, \ldots, r$ de l'indice i, et que nous prenions précisément le mineur de $[P_i, Q_i]$ obtenu en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, le mineur de $[P, Q]$ qu'on formera ainsi en supprimant dans $[P, Q]$ au moins $r + 1$ lignes et $r + 1$ colonnes ne pourra pas être divisé par $ap + bq$. Donc les mineurs de $[P, Q]$ d'ordre égal ou supérieur à $r + 1$ n'admettent pas en commun le diviseur linéaire $ap + bq$, et, par suite, il n'y a pas plus de $r + 1$ diviseurs élémentaires fournis par le diviseur linéaire $ap + bq$.

Cherchons maintenant l'exposant du diviseur $ap + bq$ dans les mineurs d'ordre ϖ inférieur à $r + 1$. Soit ρ le nombre total des déterminants $[P_i, Q_i]$, on a

$$\rho - \varpi = (\rho - r - 1) + (r - \varpi + 1).$$

Puisqu'il n'y a pas plus de ϖ nombres m_0, m_1, ..., m_ρ qui ne soient pas nuls, il y en a au moins $\rho - \varpi$ ou encore

$$(\rho - r - 1) + (r - \varpi + 1)$$

qui le sont.

On pourra bien prendre nuls les $\rho - r - 1$ nombres m qui ne correspondent pas aux indices $0, 1, \ldots, r$; mais parmi ces derniers il faudra en prendre au moins $r - \varpi + 1$ qui soient nuls.

Donc, dans le produit

$$\Pi [P_i, Q_i]^{(m_i)}$$

apparaîtront au moins $r - \varpi + 1$ des déterminants $[P_i, Q_i]$ où i est égal à $0, 1, \ldots, r$. Par suite, chaque mineur de l'ordre ϖ de $[P, Q]$ sera divisible par une puissance de $(ap + bq)$ dont l'exposant sera la somme de $r - \varpi + 1$ des nombres $e_0, e_1, \ldots, e_r$. Cet exposant ne sera pas plus petit que la somme

$$e_\varpi + e_{\varpi+1} + \ldots + e_r.$$

D'ailleurs, si l'on égale à l'unité les nombres m_i auxquels correspondent les exposants $e_0, e_1, \ldots, e_{\varpi-1}$ et à zéro les autres nombres m_i, on peut former un mineur de $[P, Q]$ qui admette $ap + bq$ comme diviseur exactement au degré $e_\varpi + e_{\varpi+1} + \ldots + e_r$ et qui soit d'ordre ϖ. On en conclut que $(ap + bq)^{e_\varpi + \ldots + e_r}$ est la plus haute puissance de $ap + bq$ qui divise à la fois tous les mineurs d'ordre ϖ de $[P, Q]$.

Posons alors

$$
\begin{aligned}
l_0 &= e_0 + e_1 + \ldots + e_\varpi + \ldots + e_r,\\
l_0 - e_0 = l_1 &= \phantom{e_0 +{}} e_1 + \ldots + e_\varpi + \ldots + e_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
l_{\varpi-1} - e_{\varpi-1} = l_\varpi &= \phantom{e_0 + e_1 + \ldots + {}} e_\varpi + \ldots + e_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
l_{r-1} - e_{r-1} = {} & \phantom{e_0 + e_1 + \ldots + e_\varpi + \ldots + {}} e_r,
\end{aligned}
$$

ou encore

$$l_0 - l_1 = e_0, \quad l_1 - l_2 = e_1, \quad \ldots, \quad l_{r-1} - l_r = e_r, \quad l_r = e_r;$$

$l_0, l_1, \ldots, l_r$ seront les plus hauts exposants des puissances de $ap + bq$ respectivement dans le déterminant principal, dans ses mineurs du premier ordre, etc., dans ses mineurs de l'ordre r. Si l'on se reporte aux définitions posées au début du Chapitre, on voit que

$$(ap + bq)^{e_0}, \quad \ldots, \quad (ap + bq)^{e_r}$$

sont les diviseurs élémentaires de $[P, Q]$ qui correspondent au diviseur linéaire $ap + bq$.

Les nombres e ne vont pas en croissant : c'est une condition à ajouter à celles qu'on a trouvées dans les définitions du début.

56. Puisque les formes canoniques de deux formes bilinéaires P et Q ne dépendent que des diviseurs élémentaires du déterminant $[P, Q]$ et de deux constantes arbitraires g et h, on en conclut que si on laisse arbitraires g et h, et si l'on fait *une double substitution générale dans des formes canoniques construites* a priori, *on obtiendra les formes bilinéaires les plus générales correspondant aux diviseurs élémentaires que l'on a choisis.*

57. Dans le cas où le déterminant $[P, Q]$ a n diviseurs élémentaires, plusieurs pouvant provenir de diviseurs linéaires égaux entre eux, les exposants $e_1, e_2, \ldots, e_r$ sont tous égaux à l'unité. Les formes canoniques deviennent simplement

$$
\begin{aligned}
P &= a_1\xi_1\eta_1 + \ldots + a_n\xi_n\eta_n,\\
Q &= b_1\xi_1\eta_1 + \ldots + b_n\xi_n\eta_n.
\end{aligned}
$$

Réciproquement, le déterminant de la forme

$$pP + qQ = \sum_i (a_i p + b_i q)\xi_i \eta_i$$

admet les diviseurs élémentaires

$$a_1 p + b_1 q, \quad \ldots, \quad a_n p + b_n q.$$

Il faut donc, pour que P et Q puissent prendre les formes précédentes, que le déterminant [P, Q] possède n diviseurs élémentaires. Mais [P, Q] renferme chacun de ces diviseurs à la première puissance; tous les exposants e sont égaux à l'unité, et, pour un même diviseur linéaire de [P, Q], on a

$$\begin{aligned} l_0 - l_1 &= 1, \\ l_1 - l_2 &= 1, \\ \ldots\ldots\ldots&, \\ l_r &= 1. \end{aligned}$$

En conséquence, un même diviseur linéaire du degré l_0 de multiplicité fournit l_0 diviseurs élémentaires dont les exposants e sont égaux à l'unité, et ce diviseur linéaire est commun à tous les mineurs d'ordre $l_0 - 1$. On a donc ce théorème :

Pour que les formes P *et* Q *puissent s'écrire*

$$P = \sum_i a_i \xi_i \eta_i, \qquad Q = \sum_i b_i \xi_i \eta_i,$$

ξ_i *et* η_i *étant respectivement des formes linéaires et homogènes des* y *et des* x, *il faut et il suffit que tout diviseur de* [P, Q] *qui entre comme diviseur linéaire au degré* $l_0 > 1$ *soit en même temps un diviseur commun de tous les mineurs de l'ordre* $l_0 - 1$ *de* [P, Q].

58. Considérons enfin les deux formes bilinéaires

$$P = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \tag{47}$$

$$P' = x'_1 y'_1 + \ldots + x'_n y'_n, \tag{48}$$

et supposons que l'on veuille par une double substitution linéaire passer de P à P' on posera

$$y'_i = c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n, \tag{49}$$

et l'on en déduira

$$\sum x'_i y'_i = \sum x'_i c_{ij} y_j = \sum x'_j c_{ji} y_i = \sum x_i y_i.$$

d'où

$$x_i = c_{1i}x'_1 + \ldots + c_{ni}x'_n. \tag{50}$$

Il est évident que l'on peut remplacer les y et les y' par des fonctions quelconques, pourvu que l'on respecte les équations (49) ou, ce qui revient au même, les équations (50), ces deux sortes de relations s'entraînant l'une l'autre quand on pose $P = P'$.

Remplaçons en particulier les y par des combinaisons linéaires d'eux-mêmes, soit par exemple y_i par

$$a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

de sorte que P deviendra la forme bilinéaire générale

$$Q = \Sigma a_{ij}x_i y_j.$$

Remplaçons de même les y' par des combinaisons analogues, soit y'_i par

$$a'_{i1}y'_1 + \ldots + a'_{in}y'_n,$$

de sorte que P' deviendra la forme bilinéaire générale

$$Q' = \Sigma a'_{ij}x'_i y'_j;$$

on suppose que les relations (50) sont conservées. On devra donc avoir

$$\Sigma a'_{ij}y'_j = c_{i1}(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n) + \ldots + c_{in}(a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n). \tag{51}$$

Peut-on satisfaire à ces relations (51) tout en conservant les relations (49)? Il faudra que l'on ait

$$\begin{aligned} & a'_{i1}(c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n) + \ldots + a'_{in}(c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n) \\ & \quad = c_{i1}(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n) + \ldots + c_{in}(a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n) \end{aligned} \tag{52}$$

ou encore

$$a'_{i1}c_{1j} + \ldots + a'_{in}c_{nj} = c_{i1}a_{1j} + \ldots + c_{in}a_{nj} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{53}$$

Réciproquement, si ces relations sont satisfaites, on aura identiquement les relations (52) et, à cause des relations (51), on aura

$$a'_{i1}(c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n) + \ldots + a'_{in}(c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n) = a'_{i1}y'_1 + \ldots + a'_{in}y'_n. \tag{54}$$

Or, le déterminant des c n'étant pas nul et celui des a n'étant pas nul non plus, on remarquera que les relations (53) expriment que le produit du détermi-

nant des a' par le déterminant des c est égal au produit du déterminant des c par celui des a. Donc le déterminant des a' n'est pas nul, et les relations (54) entraînent les relations

$$y'_i = c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n. \tag{49}$$

Par suite, pour qu'une même substitution double

$$\left\{ \begin{aligned} y'_i &= c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n, \\ x_i &= c_{1i} x'_1 + \ldots + c_{ni} x'_n \end{aligned} \right. \tag{55}$$

ramène à la fois P à P′ et Q à Q′, il faut et il suffit que les relations (53) existent.

Mais alors les déterminants des deux formes $Q - \omega P$ et $Q' - \omega P'$ auront mêmes diviseurs élémentaires, et réciproquement si $Q - \omega P$, $Q' - \omega P'$ ont mêmes diviseurs élémentaires, on pourra calculer les relations (55), qui auront bien la forme indiquée à cause de la forme spéciale donnée à P et à P′.

En résumé, *si l'on a les relations* (53), *les deux déterminants*

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad R'(\omega) = \begin{vmatrix} a'_{11} - \omega & \ldots & a'_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1} & \ldots & a'_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

ont mêmes diviseurs élémentaires, et réciproquement, si ce fait a lieu, on a les relations (55) *et, par suite, les relations* (53).

Nous aurons à appliquer ce théorème final dans la théorie des équations différentielles.

CHAPITRE III.

DES POINTS SINGULIERS.

59. On peut faire remonter l'étude des points singuliers au célèbre Mémoire de Puiseux sur les points algébriques; mais le travail fondamental, relativement aux points singuliers des intégrales des équations linéaires, est celui de M. Fuchs.

60. Nous avons supposé dans le Chapitre premier que la variable x décrivait, dans le plan des x, un chemin quelconque partant d'un point initial x_0 et conduisant à un point terminus quelconque, ce chemin étant assujetti à la condition de ne passer par aucun point singulier des coefficients des équations différentielles linéaires (n°s 2 et suivants). Nous considérerons maintenant le cas, plus spécial, où le point terminus se confond avec le point de départ. La variable décrira donc un chemin fermé. Les éléments des solutions du système

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = \Sigma a_{ij} y_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

auront pris des valeurs nouvelles. Nous déterminerons l'influence que peut avoir sur ces valeurs un point singulier entouré par le chemin fermé décrit par la variable x.

61. Nous supposons toujours que, dans une région T du plan, les fonctions a_{ij} qui entrent dans les équations (A) soient uniformes et continues, sauf en certains points que nous appelons *singuliers*. Quel que soit le chemin fermé suivi par la variable x, les coefficients a_{ij} reprendront au même point du plan la même valeur. Ces fonctions sont d'ailleurs *régulières* en chaque point non singulier, c'est-à-dire sont développables dans un domaine convenable de chaque point $x = a$, en séries convergentes de la forme

$$\Sigma A_r (x - a)^r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les éléments d'une solution. Nous appellerons $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les nouvelles valeurs de ces éléments, quand la variable ayant décrit un chemin fermé recommence à le parcourir.

Cela posé, le théorème fondamental est le suivant :

Si la variable indépendante revient à sa valeur initiale, les nouvelles va-

leurs Y_{ij} des éléments d'un système fondamental de solutions sont liées aux anciennes y_{ij} par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme

(56) $$Y_{ij} = C_{j1} y_{i1} + \ldots + C_{jn} y_{in} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

En effet, si l'on considère les fonctions qui dans le mouvement de la variable x partent d'abord des valeurs Y_{ij}, on sait qu'on peut les exprimer linéairement au moyen des fonctions y_{ij}, ce qui démontre le théorème précédent.

On remarquera que le déterminant des constantes C est différent de zéro; car les fonctions Y_{ij} forment un système fondamental puisqu'elles continuent les fonctions y_{ij}, et il faut qu'on puisse exprimer les fonctions y_{ij} au moyen des fonctions Y_{ij}.

62. Supposons que le chemin fermé décrit par la variable n'entoure aucun point singulier. Nous allons montrer que les fonctions y_{ij} sont uniformes et que, par suite, les relations (56) se réduisent à la forme

$$Y_{ij} = y_{ij}.$$

Il existe un domaine du point de départ x_0 où les fonctions a sont régulières. Sans sortir de ce domaine, allons à un point x_1. Il existe, dans le domaine considéré, n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfaisant aux équations (A), et qui ont au point x_0 des valeurs arbitraires $\eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}$. Quand la variable x sera parvenue en x_1, les fonctions y auront des valeurs bien déterminées $\eta_{11}, \ldots, \eta_{n1}$. Le point x_1 n'est pas un point singulier des coefficients a. Il existe pour ce point un domaine dans lequel la variable x pourra passer du point x_1 à un point x_2 et les fonctions y passeront des valeurs $\eta_{11}, \ldots \eta_{n1}$ aux valeurs déterminées $\eta_{12}, \ldots, \eta_{n2}$.

En avançant ainsi de proche en proche, on arrivera à un point terminus quelconque. Nous supposons dans ce Chapitre que nous revenons au point x_0 lui-même.

Cela posé, remarquons que les domaines successifs sont formés de cercles qui empiètent les uns sur les autres. Prenons arbitrairement un point x'_1 dans la région commune aux domaines des deux points x_0 et x_1; puis prenons un point x'_2 dans la région commune aux domaines des deux points x_1 et x_2, etc.

Joignons le point x_0 au point x'_1 par un chemin quelconque tracé dans le domaine du point x_0, puis le point x'_1 au point x'_2 par un chemin quelconque tracé dans le domaine du point x_1, etc.

Nous pourrons substituer le chemin $x_0 x'_1 x'_2 \ldots$ au chemin $x_0 x_1 x_2 \ldots$.

En effet, on peut évidemment substituer au chemin nouveau le chemin obtenu

en allant du point x_0 au point x'_1, du point x'_1 au point x_1 dans la partie commune à deux domaines, du point x_1 au point x'_1 par le même chemin, du point x'_1 au point x'_2, du point x'_2 au point x_2 et du point x_2 au point x'_2 sans sortir de la partie commune à deux domaines, etc.; or le chemin direct $x_0 x_1$ et le chemin $x_0 x'_1 x_1$ conduisent aux mêmes valeurs $\eta_{11}, \ldots, \eta_{n1}$, car on n'est pas sorti du domaine du point x_0; le chemin $x_1 x'_1 x'_2 x_2$ et le chemin direct $x_1 x_2$ sont de même équivalents, etc. Il est en outre évident que le chemin $x'_1 x_1$ par exemple, étant décrit successivement dans les deux sens, ne change pas la valeur de la fonction et peut être supprimé.

Il résulte de là que, connaissant les valeurs initiales des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ au point x_0, on peut revenir à ce point x_0 par deux chemins fermés voisins différents sans changer les valeurs initiales des fonctions Y.

Mais alors, si le chemin fermé décrit par la variable x peut être déformé dans la région T d'une manière continue en ne rencontrant pas de points singuliers, on pourra le réduire au point x_0 lui-même. C'est ce qu'expriment les relations

$$Y_{ij} = y_{ij}.$$

En résumé, les éléments des solutions du système (A) *sont des fonctions uniformes dans toute région qui ne renferme pas de points singuliers des coefficients* a.

63. *Les relations* (56) *sont caractéristiques des solutions des systèmes* (A) *d'équations différentielles linéaires et homogènes.*

Soit, en effet, D le déterminant, supposé différent de zéro, de n^2 fonctions y_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ d'une variable indépendante x, *régulières* en tous les points x, sauf en des *points singuliers*, lorsque la variable reste dans une région T du plan. Supposons que cette variable x décrive un chemin fermé ne passant par aucun point singulier et revienne à sa valeur initiale. Si les n^2 fonctions prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants, telles que les relations (56), ces fonctions forment un système fondamental de solutions d'équations de la forme (A), dont les coefficients a sont uniformes, et n'ont pas d'autres *points singuliers* que les *points singuliers* des fonctions.

Nous démontrerons cette proposition en formant un système d'équations tel que (A), auquel satisfassent les n solutions

$$y_{1j},\quad y_{2j},\quad \ldots,\quad y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous aurons, en général, les relations

$$\frac{dy_{ij}}{dx} = a_{i1} y_{1j} + \ldots + a_{in} y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

et nous en tirerons

$$\mathrm{D}a_{ip} = \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & \frac{dy_{i1}}{dx} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & \cdots & \frac{dy_{in}}{dx} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que nous pourrons calculer les coefficients a.

Ces coefficients sont exprimés par le rapport de deux déterminants. Le dénominateur du rapport est toujours D; le numérateur est le résultat obtenu en remplaçant dans D les éléments d'une colonne par les dérivées des fonctions y_{ij}. Les éléments des deux déterminants prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme (56), quand la variable x a décrit son chemin fermé. Les constantes sont les mêmes pour les éléments homologues des deux déterminants qui forment le rapport. Les deux termes du rapport sont donc multipliés par le même déterminant des constantes. Donc le rapport ne change pas et les fonctions a sont des fonctions uniformes.

Il résulte du calcul des coefficients a qu'ils ne peuvent avoir d'autres points singuliers que ceux des fonctions y_{ij} elles-mêmes.

Enfin, le déterminant D étant différent de zéro, les fonctions y_{ij} forment un système fondamental de solutions du système d'équations différentielles

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n.$$

64. Prenons l'exemple donné par M. Tannery.

Soit $f(y, x) = 0$ une équation algébrique rationnelle, entière et de degré n en y. Cette équation définit n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui sont régulières en tous les points du plan, sauf en des points *singuliers algébriques*. Si la variable décrit son chemin fermé, ces n fonctions prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations telles que les relations (56) et même de la forme la plus simple. En effet, en un point x, l'une de ces fonctions doit rester la même, ou être remplacée par l'une des autres, après que la variable a fait le tour du point x. Cela résulte de ce que l'équation algébrique ne peut fournir que n fonctions y différentes.

Les dérivées successives des fonctions y seront des fonctions satisfaisant aux mêmes relations que ces fonctions elles-mêmes. Nous considérerons comme inconnues auxiliaires ces dérivées jusqu'à celles de l'ordre $n - 1$ inclusivement.

Déterminons y par la relation algébrique

$$f(y, x) = 0$$

du degré n en y. Les n^2 fonctions inconnues que déterminera cette équation satisfont à un système différentiel tel que (A), *lorsque leur déterminant n'est pas nul,* c'est-à-dire quand elles sont *linéairement* indépendantes. Dans le cas contraire, le système différentiel renferme moins de n inconnues.

65. Faisons le calcul.

On peut trouver deux polynomes A et B, tels que l'expression

$$\varphi = Af + B\frac{\partial f}{\partial y}$$

soit indépendante de y. A et B seront deux polynomes entiers et rationnels en y et x et de degrés respectifs au plus $n-2$ et $n-1$ par rapport à y. Or on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0;$$

on aura donc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{B\frac{\partial f}{\partial x}}{B\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{B\frac{\partial f}{\partial x}}{\varphi},$$

si y satisfait à l'équation

$$f(y, x) = 0.$$

Au moyen de l'équation $f(y, x) = 0$, on peut réduire les puissances de y au plus à l'exposant $n-1$ et l'on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_1}{\varphi},$$

$\frac{P_1}{\varphi}$ étant une fonction rationnelle en x et un polynome en y au plus de degré $n-1$.

On aura ensuite

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{P_1}{\varphi}\right) = \frac{P_2}{\varphi^2},$$

$\frac{P_2}{\varphi^2}$ étant une expression de même nature que $\frac{P_1}{\varphi}$.

En continuant ainsi, on pourra poser, en appelant y_1 une solution quelconque de l'équation algébrique,

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= \frac{P_1}{\varphi} = A_0^2 + A_1^2 y_1 + \ldots + A_{n-1}^2 y_1^{n-1},\\
\frac{d^2y_1}{dx^2} &= \frac{P_2}{\varphi^2} = A_0^3 + A_1^3 y_1 + \ldots + A_{n-1}^3 y_1^{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} &= \frac{P_{n-1}}{\varphi^{n-1}} = A_0^n + A_1^n y_1 + \ldots + A_{n-1}^n y_1^{n-1},\\
\frac{d^ny_1}{dx^n} &= \frac{P_n}{\varphi^n} = A_0^{n+1} + A_1^{n+1} y_1 + \ldots + A_n^{n+1} y_1^{n-1}.
\end{aligned}$$

Entre ces n équations on peut éliminer les $n-1$ puissances $y_1^0, y_1^2, \ldots, y_1^{n-1}$, et il restera une relation qui, développée, se présentera sous la forme

$$U_0 \frac{d^n y_1}{dx^n} + U_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + U_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + U_n y_1 = 0,$$

ou, comme l'on sait, sous la forme équivalente

$$U_0 \frac{dy_n}{dx} + U_1 y_n + \ldots + U_{n-1} y_2 + U_n y_1 = 0,$$

$$\frac{dy_k}{dx} = y_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On obtient ainsi le résultat demandé. On remarquera que tous les coefficients U sont uniformes comme fractions rationnelles de x. De plus, les points singuliers ne peuvent provenir que des équations $\varphi = 0$ ou $U_0 = 0$, ou de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le coefficient de y^n dans $f(y, x) = 0$.

Le seul cas qui prête à discussion est celui où l'on a

$$U_0 = 0,$$

ou encore

$$U_0 = \begin{vmatrix} A_0^2 & A_2^2 & \ldots & A_{n-1}^2 \\ A_0^3 & A_2^3 & \ldots & A_{n-1}^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_0^n & A_2^n & \ldots & A_{n-1}^n \end{vmatrix} = 0.$$

Or, considérons le déterminant D, on a

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \ldots & \frac{dy_n}{dx} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \ldots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots \\ A_0^2 + A_1^2 y_1 + \ldots + A_{n-1}^2 y_1^{n-1} & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ A_0^n + A_1^n y_1 + \ldots + A_{n-1}^n y_1^{n-1} & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & \ldots & y_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots \\ \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots \\ 1 & y_n & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ A_0^2 & A_1^2 & A_2^2 & \ldots \\ \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \ldots \\ A_0^n & A_1^n & A_2^n & \ldots \end{vmatrix}.$$

Le premier facteur est le produit des différences deux à deux des quantités $y_1 - y_n$.

Le second facteur est la quantité U_0 elle-même.

On voit par là que si les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont linéairement indépen-

dantes, l'équation $U_0 = 0$ ne peut être satisfaite que par les points singuliers, c'est-à-dire par les valeurs de x qui annulent D exceptionnellement.

Dans le cas où l'on a identiquement $U_0 = 0$, les n fonctions y étant supposées distinctes, on aura $D = 0$, c'est-à-dire que ces fonctions, quoique distinctes, ne sont pas linéairement indépendantes.

Dans ce cas, l'équation différentielle

$$U_0 \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots = 0$$

s'abaisse à un ordre moindre, ou, ce qui revient au même, le système différentiel équivalent peut être ramené à renfermer moins de n équations différentielles.

66. Revenons aux relations (56) qui relient entre elles les valeurs nouvelles et les valeurs anciennes des éléments d'un système fondamental de solutions.

Considérons à la fois deux systèmes fondamentaux de solutions dont nous représenterons par y_{ij} et η_{ij} les éléments. Soient Y_{ij} et H_{ij} leurs nouvelles valeurs. Nous devrons avoir les deux systèmes de relations à coefficients constants

$$Y_{ij} = l_{j1} y_{i1} + \ldots + l_{jn} y_{in},$$
$$H_{ij} = \lambda_{j1} \eta_{i1} + \ldots + \lambda_{jn} \eta_{in} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

et les deux déterminants L et Λ des constantes l d'une part, λ de l'autre, seront différents de zéro.

Exprimons les éléments η_{ij} en fonction des éléments y_{ij}. Les relations sont à coefficients constants et de la forme

$$\eta_{ij} = C_{j1} y_{i1} + \ldots + C_{jn} y_{in},$$

et nous en tirons

$$H_{ij} = C_{j1} Y_{i1} + \ldots + C_{jn} Y_{in}.$$

Il résulte de là, en développant les deux expressions de H_{ij},

$$H_{ij} = (C_{j1} l_{11} + \ldots + C_{jn} l_{n1}) y_{i1} + \ldots + (C_{j1} l_{1n} + \ldots + C_{jn} l_{nn}) y_{in},$$
$$H_{ij} = (\lambda_{j1} C_{11} + \ldots + \lambda_{jn} C_{n1}) y_{i1} + \ldots + (\lambda_{j1} C_{1n} + \ldots + \lambda_{jn} C_{nn}) y_{in},$$

que l'on a

$$C_{j1} l_{1k} + \ldots + C_{jn} l_{nk} = \lambda_{j1} C_{1k} + \ldots + \lambda_{jn} C_{nk};$$

on en conclut (§ 38, Chapitre II) *que les diviseurs élémentaires du déterminant*

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} l_{11} - \omega & \ldots & l_{n1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l_{1n} & \ldots & l_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

Or, si l'on considère la forme de ce déterminant $R'(\omega)$ par rapport aux coefficients qu'on appelait l d'une manière générale, on voit qu'on a les relations importantes pour un système choisi y'_{ij} de solutions

$$\begin{aligned}
Y'_{i1} &= \omega_1 y'_{i1},\\
Y'_{i2} &= \omega_1 y'_{i2} + y'_{i1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Y'_{ik} &= \omega_1 y'_{ik} + y'_{i,k-1},\\
Y'_{i'1} &= \omega_2 y'_{i'1},\\
Y'_{i'2} &= \omega_2 y'_{i'2} + y'_{i'1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Y'_{i'k'} &= \omega_2 y'_{i'k'} + y'_{i',k'-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On a donc ce théorème remarquable :

Soient $(\omega_1 - \omega)^{e_1}, \ldots, (\omega_\rho - \omega)^{e_\rho}$ *les diviseurs élémentaires du déterminant* $R(\omega)$, *et il importe peu que les binomes* $\omega_1 - \omega, \ldots, \omega_\rho - \omega$ *soient distincts ou non, on peut trouver un système fondamental de solutions dont les éléments se groupent d'après les relations*

$$\begin{aligned}
Y_{i1} &= \omega_h y_{i1},\\
Y_{i2} &= \omega_h y_{i2} + y_{i1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Y_{i,e_h} &= \omega_h y_{i,e_h} + y_{i,e_h-1},
\end{aligned}$$

$(\omega_h - \omega)^{e_h}$ *étant l'un quelconque des* ρ *diviseurs élémentaires de* $R(\omega)$.

On peut arriver à ces relations en partant d'un système fondamental quelconque de solutions, et en substituant à ses éléments d'autres éléments qui leur soient liés par des relations linéaires indépendantes et à coefficients constants convenablement choisis.

68. La seconde partie du théorème précédent conduit à la question intéressante du choix des coefficients constants qui permettent de passer d'un système fondamental au système spécial défini par le théorème.

Soit $\omega_1 - \omega$ un diviseur linéaire quelconque du déterminant

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} l_{11} - \omega & \ldots & l_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n1} & \ldots & l_{nn} - \omega \end{vmatrix},$$

correspondant aux éléments y_{ij} d'un système fondamental de solutions; on a,

par suite,

(57) $$Y_{ij} = l_{j1} y_{i1} + \ldots + l_{jn} y_{in}.$$

L'équation $R(\omega) = 0$ s'appelle, d'après M. Fuchs, *l'équation fondamentale déterminante* ou simplement *l'équation fondamentale*.

Soient $(\omega_1 - \omega)^{h_0}$, $(\omega_1 - \omega)^{h_1}$, ..., $(\omega_1 - \omega)^{h_{r-1}}$ les plus hautes puissances de $\omega_1 - \omega$ qui divisent respectivement $R(\omega)$, puis tous ses mineurs du premier ordre, ..., enfin tous ses mineurs de l'ordre $r - 1$. On sait que les nombres h_0, h_1, ..., h_{r-1} ne peuvent aller qu'en décroissant, et que leurs différences successives

$$h_0 - h_1 = e_0, \qquad h_1 - h_2 = e_1, \qquad \ldots, \qquad h_{r-2} - h_{r-1} = e_{r-2}, \qquad h_{r-1} = e_{r-1}$$

ne peuvent pas aller en croissant.

Puisqu'il doit exister une solution satisfaisant à la relation

$$U_i = \omega_1 u_i,$$

si l'on a

$$u_i = g_1 y_{i1} + \ldots + g_n y_{in}$$

et, par suite,

$$U_i = g_1 Y_{i1} + \ldots + g_n Y_{in} = \Sigma (g_1 l_{1j} + \ldots + g_n l_{nj}) y_{ij},$$

on devra pouvoir satisfaire aux conditions

(58) $$l_{1j} g_1 + \ldots + (l_{jj} - \omega_1) g_j + \ldots + l_{nj} g_n = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Or le déterminant $R(\omega)$ admettant le diviseur linéaire $\omega_1 - \omega$, on voit déjà que les conditions (58) sont compatibles. Ensuite tous les mineurs de $R(\omega)$ s'annulant pour $\omega = \omega_1$ jusqu'à ceux de l'ordre r exclusivement, on pourra exprimer g_1, g_2, ..., g_n en fonctions linéaires et homogènes de r constantes arbitraires.

Il y aura donc r solutions u_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, r)$ linéairement indépendantes, satisfaisant à la relation

$$U_{ij} = \omega_1 u_{ij}$$

et *donnant par combinaisons linéaires toutes les autres solutions qui satisfont aux mêmes relations*.

69. Ces r solutions étant déterminées, il existera des solutions $u'_{ij'}$ satisfaisant aux relations

$$U'_{ij'} = \omega_1 u'_{ij'} + u'_{i,j'-1},$$

si tous les diviseurs élémentaires fournis par $\omega_1 - \omega$ ne sont pas simples.

Pour trouver ces nouvelles solutions, nous supposerons qu'on a choisi pour système fondamental un système de solutions où entrent les fonctions déjà calculées u_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, r$). Ce système peut être considéré comme fondamental, car on peut évidemment prendre arbitrairement les valeurs de r désignées des quantités $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Soient $g_1, g_2, g_r, \ldots$ ces quantités. Si le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} g_{11} & \ldots & g_{r1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{1r} & \ldots & g_{rr} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, on pourra substituer, quelles que soient les valeurs que l'on calcule pour $g_{r+1}, g_{r+2}, \ldots, g_n$, le système u_{ij}, y_{ij} au système primitif, sans que le nouveau système *cesse d'être fondamental.*

Alors les relations (57) prendront la forme

$$(58)\quad \begin{cases} U_{i1} = \omega_1 u_{i1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{ir} = \omega_1 u_{ir}, \\ Y_{i,r+1} = l_{r+1,1} u_{i1} + \ldots + l_{r+1,r} u_{ir} + l_{r+1,r+1} y_{i,r+1} + \ldots + l_{r+1,n} y_{in}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_{in} = l_{n1} u_{i1} + \ldots + l_{nr} u_{ir} + l_{n,r+1} y_{i,r+1} + \ldots + l_{nn} y_{in}. \end{cases}$$

70. Nous montrerons tout d'abord qu'il existe une relation de la forme

$$U_i = \omega_1 u_i + \varphi(u_{ij}),$$

où φ est une fonction linéaire homogène à coefficients constants des u_{ij}, et avec la condition

$$u_i = g'_1 u_{i1} + \ldots + g'_r u_{ir} + g'_{r+1} y_{i,r+1} + \ldots + g'_n y_{in},$$

qui entraîne

$$U_i = g'_1 U_{i1} + \ldots + g'_r U_{ir} + g'_{r+1} Y_{i,r+1} + \ldots + g'_n Y_{in}.$$

Il faudra que l'on ait

$$\begin{aligned} g'_1 \omega_1 u_{i1} + \ldots + g'_r \omega_1 u_{ir} + g'_{r+1}(l_{r+1,1} u_{i1} + \ldots + l_{r+1,n} y_{in}) + \ldots \\ + g'_n (l_{n1} u_{i1} + \ldots + l_{nn} y_{in}) \\ = \omega_1 (g'_1 u_{i1} + \ldots + g'_r u_{ir} + g'_{r+1} y_{i,r+1} + \ldots + g'_n y_{in}) + \lambda_1 u_{i1} + \ldots + \lambda_r u_{ir}. \end{aligned}$$

On tire de là les équations de condition suivantes :

$$(58\,a)\quad \begin{cases} g'_{r+1}\,l'_{r+1,1} \quad + \ldots + g'_n\,l'_{n1} = \lambda_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_{r+1}\,l'_{r+1,r} \quad + \ldots + g'_n\,l'_{nr} = \lambda_r, \\ g'_{r+1}(l'_{r+1,r+1} - \omega) + \ldots + g'_n\,l'_{n,r+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g'_{r+1}\,l'_{r+1,n} \quad + \ldots + g'_n(l'_{nn} - \omega) = 0. \end{cases}$$

Ces équations ne renfermant pas $g'_1, \ldots, g'_r$, on pourra prendre ces quantités égales à o et poser simplement

$$(59)\qquad u'_i = g'_{r+1}\,y_{i,r+1} + \ldots + g'_n\,y_{in}.$$

Mais alors les quantités $g'_{r+1}, \ldots, g'_n$, qui sont seules à déterminer, devront pouvoir se tirer des équations (58 a) auxquelles elles satisfont.

Effectivement, si l'on prend les $n - r$ dernières équations précédentes, le déterminant des coefficients l' correspondant est un mineur de l'ordre r du déterminant

$$R'(\omega) = \left|\begin{array}{cc|ccc} \omega_1 - \omega & \ldots\ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & . & \ldots & . \\ \ldots\ldots & \omega_1 - \omega & 0 & \ldots & 0 \\ \hline l'_{r+1,1} & \ldots\ldots & l'_{r+1,r+1} - \omega & \ldots & l'_{r+1,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l_{n,1} & \ldots\ldots & l'_{r+1,n} & \ldots & l'_{nn} - \omega \end{array}\right|$$

relatif au système de solutions (57 a) et qui a les mêmes diviseurs élémentaires que le déterminant $R(\omega)$. Si ce déterminant mineur est nul, les dernières équations (58 a) sont compatibles, et de ces équations on tirera les valeurs de $g'_{r+1}, \ldots, g'_n$ et, si l'on veut, ensuite on aura les valeurs des inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ par les premières équations (58 a).

71. Examinons le déterminant $R'(\omega)$. Il est égal à $(\omega_1 - \omega)^r \times R_1(\omega)$ en posant

$$R_1(\omega) = \begin{vmatrix} l'_{r+1,r+1} - \omega & \ldots & l'_{r+1,n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l'_{n,r+1} & \ldots & l'_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

Or $R'(\omega)$, ayant les mêmes diviseurs élémentaires que $R(\omega)$, est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_0}$, donc $R_1(\omega)$ est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_0 - r}$. Les mineurs du premier ordre de $R'(\omega)$ seront divisibles par $(\omega_1 - \omega)^{h_1}$. En particulier, chaque mineur, égal à $(\omega_1 - \omega)^r M_1 R_1(\omega)$, où M_1 est la caractéristique d'un mineur du premier

ordre, est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_1}$ et, par suite, chaque mineur $M_1 R_1(\omega)$ est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_1 - r}$.

De même chaque mineur du deuxième ordre de $R_1(\omega)$, représenté par $M_2 R_1(\omega)$, est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_2 - r}$, etc. Enfin, chaque mineur de l'ordre $r - 1$ de $R_1(\omega)$ sera divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_{r-1} - r}$. On pourra le représenter par $M_{r-1} R_1(\omega)$.

Discutons ces résultats. Il faut d'abord écarter les puissances $(\omega_1 - \omega)^{h-r}$ dont les exposants ne seraient pas positifs. Comme les nombres $h_0, h_1, \ldots, h_{r-1}$ vont en décroissant, on voit que le nombre r séparera cette suite de nombres en deux autres, l'une $h_0, h_1, \ldots, h_{s-1}$ de nombres plus grands que r et l'autre $h_s, \ldots, h_{r-1}$ de nombres plus petits que r. Les premiers seront seuls à considérer.

En conséquence, nous dirons que le déterminant $R_1(\omega)$ et ses mineurs d'ordres successifs admettent jusqu'à l'ordre s exclusivement les diviseurs respectifs

$$(\omega_1 - \omega)^{h_0 - r}, \quad \ldots, \quad (\omega_1 - \omega)^{h_{s-1} - r}.$$

Deux cas pourront se présenter. On pourra avoir $h_0 = r$; alors les solutions $u_{i1}, \ldots, u_{ir}$ seront toutes les solutions distinctes correspondant à la racine ω_1. Dans le cas de $h_0 = r$, on sait que le diviseur $(\omega_1 - \omega)^r$ fournit r diviseurs élémentaires simples. Nous nous trouvons d'accord avec la théorie des paragraphes précédents.

On peut avoir $h_0 > r$, alors ω_1 est racine de $R_1(\omega) = 0$, et le calcul préparé plus haut montre que l'on peut former s *solutions indépendantes,* telles que l'on ait

$$U'_i = \omega_1 u'_i + \varphi_i(u_{ij}), \tag{60}$$

où φ est la caractéristique d'une fonction linéaire et homogène à coefficients constants.

La fonction φ_i satisfait, comme les éléments u_{ij} eux-mêmes, à la relation

$$\Phi_i = \omega_1 \varphi_i.$$

Soient $u'_{ij'}$ $(j' = 1, 2, \ldots, s)$ les nouvelles solutions. Toutes celles qui satisfont aux mêmes relations (60), pouvant être obtenues par le même procédé, ne pourront être que des groupes de fonctions linéaires et homogènes des u et des u'.

Il ne peut y avoir entre $\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{is}$ aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, sans quoi l'on pourrait former une fonction linéaire et homogène avec $u'_{i1}, \ldots, u'_{is}$ satisfaisant à la relation

$$U'_i = \omega_1 u'_i.$$

Cette solution serait bien distincte des u_{ik}, puisque les u' ne dépendent que des y.

Il y aurait donc plus de r solutions satisfaisant à la relation

$$U = \omega_1 u,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Maintenant, puisque $\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{is}$ sont des fonctions indépendantes, elles peuvent remplacer s des solutions $u_{i1}, \ldots, u_{ir}$ et porter les mêmes noms, de sorte que l'on peut écrire, sans nuire à la généralité, les relations

$$(61)\quad \begin{cases} U_{ij} = \omega_1 u_{ij} & (j = 1, 2, \ldots, r), \\ U'_{ij'} = \omega_1 u'_{ij'} + u_{ij'} & (j' = 1, 2, \ldots, s), \\ Y_{ij''} = l''_{j''1} u_{i1} + \ldots + l''_{j''r} u_{ir} + l''_{j'',r+1} u'_{i1} + \ldots + l''_{j'',r+s} u'_{is} & \\ \qquad + l''_{j'',r+s+1} y_{i,r+s+1} + \ldots + l''_{j''n} y_{in} & (j'' = r + s + 1, \ldots, n), \end{cases}$$

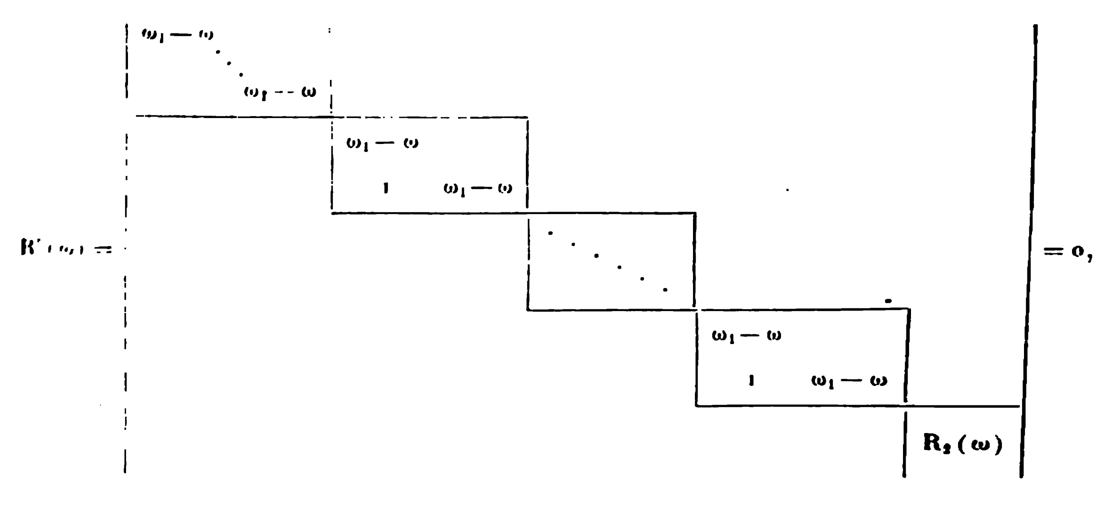
où entrent les anciennes et les nouvelles valeurs d'un système fondamental choisi de solutions des équations (A).

72. Nous pouvons, avec un changement d'indices, écrire les équations précédentes sous la forme

$$(62)\quad \begin{cases} U_{ij} = \omega_1 u_{ij} & (j = 1, 2, \ldots, r - s), \\ U_{i,j_1+1} = \omega_1 u_{i,j_1+1} & (j_1 = r - s), \\ U'_{i,j_1+1} = \omega_1 u'_{i,j_1+1} + u_{i,j_1+1}, & \\ U_{i,j_1+2} = \omega_1 u_{i,j_1+2}, & \\ U'_{i,j_1+2} = \omega_1 u'_{i,j_1+2} + u_{i,j_1+2}, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ U_{ir} = \omega_1 u_{ir}, & \\ U'_{ir} = \omega_1 u'_{ir} + u_{ir}. & \end{cases}$$

Les autres équations (61) en Y conservent les mêmes notations et le même ordre.

L'équation fondamentale, tirée des équations (62), prend la forme



en posant

$$R_2(\omega) = \begin{vmatrix} l''_{j_2 j_2} - \omega & \dots & l''_{j_2 n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ l''_{n j_2} & \dots & l''_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

et $j_2 = r + s + 1$. En outre, on emploie une forme aussi abrégée que possible pour la représentation de $R''(\omega)$.

$R''(\omega)$ a les mêmes diviseurs élémentaires que $R(\omega)$. De plus, un déterminant $R'_1(\omega)$, tiré de $R''(\omega)$ comme $R_1(\omega)$ est tiré de $R'(\omega)$, aurait le même diviseur commun à tous ses mineurs de chaque ordre que $R_1(\omega)$.

Un déterminant tel que

$$\begin{vmatrix} \omega_1 - \omega & 0 \\ 1 & \omega_1 - \omega \end{vmatrix}$$

admet un diviseur simple $(\omega_1 - \omega)^2$.

Développons par la règle de Laplace un déterminant quelconque de la forme

$$\begin{vmatrix} \omega_1 - \omega & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \omega_1 - \omega & \dots & \dots & 0 \\ a & b & c & \dots & l \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & . \\ a' & b' & c' & \dots & l' \end{vmatrix},$$

en nous servant des deux premières lignes; nous voyons qu'il sera égal à

$$\begin{vmatrix} \omega_1 - \omega & 0 \\ 1 & \omega_1 - \omega \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c & \dots & l \\ \dots & \dots & \dots \\ c' & \dots & l' \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire qu'il sera divisible par $(\omega_1 - \omega)^2$.

Il résulte de là que les mineurs de $R''(\omega)$, formés en employant les $r+s$ premières lignes, seront divisibles par $(\omega_1 - \omega)^{r+s}$ et, par suite, un mineur quelconque d'ordre ϖ de $R_2(\omega)$ sera divisible par $h_\varpi - (r+s)$.

Comme précédemment, il faudra chercher un nombre t tel que tous les nombres $h_0, h_1, \ldots, h_{t-1}$ soient plus grands que $r+s$ et les autres nombres $h_t, \ldots, h_{r-1}$ plus petits.

Si l'on a

$$h_0 = r+s,$$

alors les solutions $u_{i1}, \ldots, u'_{ir}$ (*voir* les équations 62) sont toutes les solutions distinctes correspondantes à la racine ω_1.

Mais si l'on a

$$h_0 > r+s,$$

alors ω_1 est une racine de $R_2(\omega) = 0$, et nous pouvons continuer le calcul de la manière suivante.

Posons

$$(63)\qquad \begin{cases} g''_{j_1} l''_{j_1 j_1} + \ldots + g''_n l''_{n j_1} = \omega_1 g''_{j_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g''_{j_1} l''_{j_1 n} + \ldots + g''_n l''_{nn} = \omega_1 g''_n. \end{cases}$$

De ces équations (63) nous pourrons tirer t systèmes de valeurs distinctes pour $g''_{j_1}, \ldots, g''_n$ et former t solutions

$$w_i = g''_{j_1} y_{i,j_1} + \ldots + g''_n y_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, t),$$

linéairement indépendantes entre elles, et linéairement distinctes des fonctions déjà formées, puisqu'elles dépendent des y. Or, si l'on multiplie les dernières équations (62) par $g''_{j_1}, \ldots, g''_n$ et si l'on ajoute, on voit que la solution w_i satisfait aux relations

$$(64)\qquad W_i = \omega_1 w_i + \psi_i(u_{i1}, \ldots, u'_{ir}),$$

en représentant par ψ_i une fonction linéaire et homogène à coefficients constants.

Les t solutions w_i permettent de former toute autre solution satisfaisant aux relations (64), car on a suivi une marche de calcul qui doit toutes les fournir. Entre les fonctions $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{it}$ il ne peut y avoir aucune relation de la forme

$$\alpha\psi_{i1} + \ldots + \lambda\psi_{it} = f(u_{i1}, \ldots, u_{ir}),$$

où $\alpha, \ldots, \lambda$ sont des constantes et f une fonction linéaire et homogène à coefficients constants, car il existerait une fonction linéaire et homogène de $w_{i1}, \ldots,$

ω_{1t}, qui, n'étant pas une expression des solutions $u_{11}, \ldots, u_{1r}$, jouirait des propriétés des éléments u', ce qui est impossible.

On remarquera aussi que t est au plus égal à s, car, s'il en était autrement, par l'élimination des u' on pourrait former une relation

$$\alpha_1 u'_{11} + \ldots + \alpha_t u'_{1t} = f(u_{11}, \ldots, u_{1r}).$$

On aurait pu voir aussi que s est au plus égal à r. Toutes ces remarques sont bien d'accord avec la théorie déjà connue.

73. La méthode suivie peut évidemment s'appliquer indéfiniment, et l'on retrouve sous une autre forme les propositions du n° 67.

74. Après avoir tiré tout ce qu'il est possible du diviseur $\omega_1 - \omega$ de $R(\omega)$, on pourra former un système fondamental de solutions

$$u_{1k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, h_1),$$
$$y_{1k} \qquad (k = h_1 + 1, \ldots, n),$$

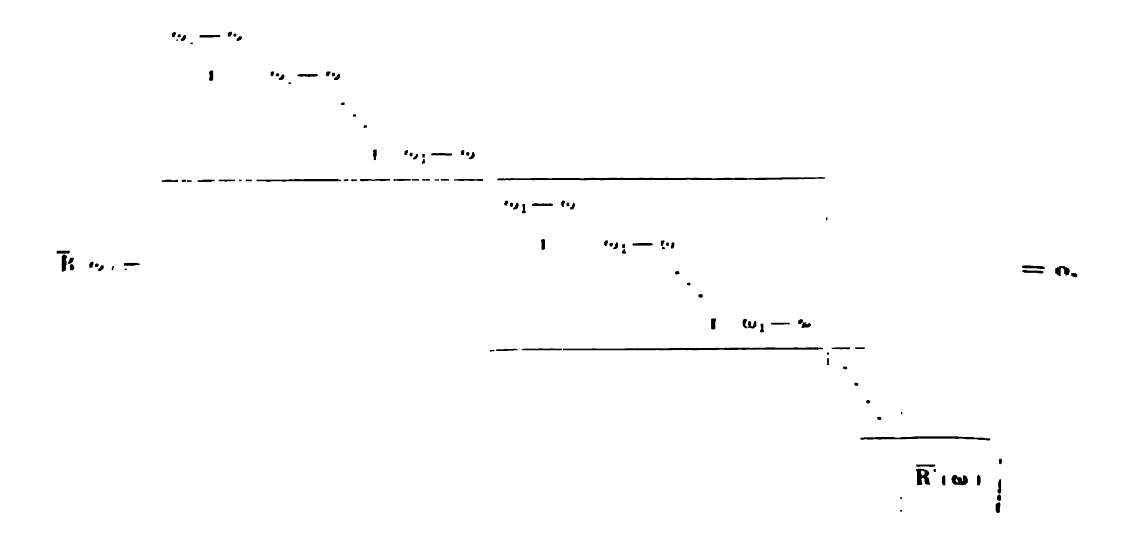
satisfaisant aux relations

$$(64) \qquad U_{1k} = \omega_1 u_{1k} + \omega_{1k} u_{1,k-1},$$

les quantités ω_{1k} étant égales à zéro ou à l'unité, à l'exception de ω_1, et aux relations

$$(65) \qquad Y_{1j} = G_{j1} u_{11} + \ldots + G_{jh_1} u_{1h_1} + G_{j,h_1+1} y_{1,h_1+1} + \ldots + G_{jn} y_{1n}.$$

On pourra raisonner sur l'équation fondamentale



où l'on a

$$R'(\omega) = \begin{vmatrix} G_{h_0+1,h_0+1} - \omega & \dots & G_{n,h_0+1} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ G_{h_0+1,n} & \dots & G_{nn} - \omega \end{vmatrix},$$

comme on a raisonné sur $R(\omega)$.

En outre, si l'on forme le système d'équations

$$\begin{aligned}
&(\omega_1 - \omega) m_1 \qquad\qquad + G_{h_0+1,1} \quad m_{h_0+1} + \dots + G_{n1} m_n = 0,\\
&\omega_{12} m_1 + (\omega_1 - \omega) m_2 \quad + G_{h_0+1,2} \quad m_{h_0+1} + \dots + G_{n2} m_n = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\qquad (G_{h_0+1,h_0+1} - \omega) m_{h_0+1} + \dots + G_{nh_0+1} m_n = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\qquad G_{h_0+1,n} \quad m_{h_0+1} + \dots + (G_{nn} - \omega) m_n = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

on pourra le résoudre en prenant pour ω une valeur ω_2 différente de ω_1 et annulant $R(\omega)$, puis en calculant les valeurs proportionnelles de $m_{h_0+1}, \dots, m_n$, et enfin en calculant successivement les autres inconnues m, dont chacune a pour coefficient $\omega_1 - \omega_2$ dans une des premières équations.

On en conclura, comme au n° 68, qu'on peut former un système fondamental de solutions

$$\begin{aligned} &u_{ih} \qquad (h = 1, 2, \dots, h_0 + h'_0),\\ &y_{ik} \qquad (k = h_0 + h'_0 + 1, \dots, n), \end{aligned}$$

où les h'_0, h'_0 premières solutions sont particularisées.

En partant de ce système fondamental et par des raisonnements analogues aux précédents, on pourra former des systèmes fondamentaux de plus en plus particuliers, jusqu'à arriver à la réalisation complète du théorème énoncé au n° 67.

75. Nous devons maintenant traduire les théorèmes démontrés jusqu'ici en supposant le point initial situé à l'infini.

Reprenons les équations (A) et remplaçons-y la variable x par la variable $\frac{1}{x'}$, de sorte que, quand x devient infini, x' devient nul. Il suffira alors d'étudier les fonctions y dans le domaine de l'origine $x' = 0$.

On aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'}\frac{dx'}{dx} = -\frac{dy}{dx'}x'^2 = -x'^2\frac{dy}{dx'},$$

et les équations (A) deviendront

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \dots + a'_{in} y_n,$$

en appelant a' ce que devient une fonction a divisée par x'^2, changée de signe et exprimée au moyen de la variable x'.

Le système (A′) étant de la même forme que le système (A), on pourra lui appliquer tous les théorèmes démontrés précédemment. Le point $x' = 0$ pourra d'ailleurs être un point singulier ou non singulier des fonctions a'.

76. Si l'on considère l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n, on sait qu'on peut en faire l'étude au moyen d'un système d'équations linéaires et homogènes équivalent.

On obtient alors les théorèmes suivants qu'il suffit d'énoncer.

I. *Si la variable indépendante revient à sa valeur initiale, les nouvelles valeurs* Y_i *des intégrales d'un système fondamental sont liées aux anciennes* y_i *par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme*

$$(66) \qquad Y_i = c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (\text{n}^\circ\ 61).$$

II. *Les relations précédentes se réduisent à*

$$Y_i = y_i,$$

si le chemin fermé décrit par la variable peut être déformé d'une manière continue sans rencontrer de points singuliers jusqu'à être réduit à un point; les fonctions y *sont uniformes dans la région où cette hypothèse est réalisée* (n° 62).

III. *Les équations* (66) *sont caractéristiques des intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre* n.

C'est-à-dire que, si n fonctions $y_1, \ldots, y_n$ linéairement *indépendantes* prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants, telles que les relations (66), ces fonctions forment un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire et homogène *d'ordre* n, dont les coefficients sont uniformes, et n'ont pas d'autres points *singuliers* dans la région considérée que les points singuliers des fonctions y.

IV. *Les diviseurs élémentaires du déterminant*

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} c_{11} - \omega & \ldots & c_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

ne dépendent pas du choix du système fondamental d'intégrales qui sert à former ce déterminant.

On sait déjà que M. Fuchs a donné à l'équation $R(\omega) = 0$ le nom d'*équation fondamentale déterminante relativement au point* $x = 0$.

V. *Soient* $(\omega_1 - \omega)^{e_1}, \ldots, (\omega_\rho - \omega)^{e_\rho}$ *les diviseurs élémentaires du déterminant* $R(\omega)$, *on peut construire, en partant d'un système fondamental quelconque d'intégrales, un système fondamental dont les éléments se groupent d'après les relations*

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \omega_h y_1,\\
Y_2 &= \omega_h y_2 + y_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Y_{e_h} &= \omega_h y_{e_h} + y_{e_h-1},
\end{aligned}$$

$(\omega_h - \omega)^{e_h}$ *étant l'un quelconque des diviseurs élémentaires du déterminant fondamental* $R(\omega)$.

VI. Si le point initial est à l'infini, on remplacera x par $\frac{1}{x'}$ et, au lieu de l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

où la variable est x, on considérera une équation de même forme où la variable sera x'.

CHAPITRE IV.

DE LA FORME ANALYTIQUE DES ÉLÉMENTS DES SOLUTIONS.

77. On sait, depuis Euler, intégrer complètement les équations et les systèmes linéaires et homogènes à coefficients constants.

Considérons d'abord une équation linéaire, homogène et à coefficients constants de la forme

$$(67)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0.$$

Cette équation peut être remplacée par le système équivalent

$$(68)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n = 0, \\ \dfrac{dy_k}{dx} = y_{k-1}, \qquad (k = 2, 3, \ldots, n). \end{cases}$$

On intègre ce système en posant

$$y_k = c_k e^{rx},$$

et en déterminant les inconnues par les conditions

$$(69)\qquad \begin{cases} c_1 r + p_1 c_1 + \ldots + p_n c_n = 0, \\ c_k r = c_{k-1}. \end{cases}$$

Ces équations (69) entraînent la relation

$$(70)\qquad F(r) = \begin{vmatrix} r + p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n \\ -1 & r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & r & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & r \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation $F(r) = 0$ est appelée l'*équation caractéristique*.

Si l'on élimine directement les inconnues C, on a

$$\begin{aligned} C_2 r &= C_1, \\ C_3 r^2 &= C_2 r = C_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_n r^{n-1} &= C_1, \end{aligned}$$

et, par suite de la première équation (69),

$$F(r) = r^n + p_1 r^{n-1} + \ldots + p_n = 0.$$

Les diviseurs élémentaires du déterminant $F(r)$ se confondant dans le cas des équations d'ordre n avec les diviseurs linéaires du polynome $F(r)$ (¹), *il suffit de résoudre l'équation algébrique* $F(r) = 0$ *de degré n pour connaître les diviseurs élémentaires du déterminant* $F(r)$.

Soit $(r - r_1)^{e_1}$ un diviseur élémentaire ou linéaire quelconque du déterminant $F(r)$. Ce déterminant $F(r)$ et ses dérivées successives admettront $(r - r_1)$ comme diviseur jusqu'aux dérivées de l'ordre e_1 exclusivement. En conséquence, si l'on pose

$$\varphi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y,$$

et si l'on considère l'équation

$$\varphi(Ce^{rx}) = Ce^{rx} F(r),$$

on voit que l'on aura successivement

$$\varphi(Ce^{r_1 x}) = 0,$$

$$\varphi\left[\frac{\partial}{\partial r_1}(Ce^{r_1 x})\right] = 0,$$

$$\varphi\left[\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}(Ce^{r_1 x})\right] = 0,$$

$$\varphi\left[\frac{\partial^{e_1 - 1}}{\partial r_1^{e_1 - 1}}(Ce^{r_1 x})\right] = 0.$$

On en conclut que chaque diviseur élémentaire $(r - r_1)^{e_1}$ fournit e_1 solutions, et, par suite, qu'on peut former n solutions des équations (68), ou encore n intégrales de l'équation (67).

Ces intégrales sont linéairement indépendantes. Car supposons que l'on ait identiquement

$$a_1 e^{r_1 x} + b_1 \frac{\partial}{\partial r_1}(e^{r_1 x}) + \ldots + l_1 \frac{\partial^{e_1 - 1}}{\partial r_1^{e_1 - 1}}(e^{r_1 x}) + a_2 e^{r_2 x} + \ldots = 0.$$

Remarquons que l'on a en général

$$\frac{\partial^k (e^{rx})}{\partial r^k} = x^k e^{rx}.$$

(¹) *Voir* Chapitre I, n° 22.

L'identité précédente reviendrait donc à la suivante

$$e^{r_1 x}(a_1 + b_1 x + \ldots + l_1 x^{e_1 - 1}) + e^{r_2 x}(a_2 + \ldots) + \ldots = 0,$$

ou encore à l'équation

$$-(a_1 + b_1 x + \ldots + l_1 x^{e_1 - 1}) = e^{(r_2 - r_1)x}(a_2 + \ldots) + \ldots.$$

Or le premier membre de cette équation s'annulerait pour un nombre fini de valeurs, le second aurait au contraire une infinité de racines, puisque les exponentielles ne peuvent disparaître identiquement. L'identité est impossible.

78. Considérons au même point de vue les équations

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on suppose constants les coefficients a. On trouve des solutions de ce système en posant

$$(71) \qquad y_i = C_i e^{rx},$$

et en déterminant les inconnues r et C_i par les équations

$$(72) \qquad F(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0$$

et

$$(73) \qquad \begin{cases} (a_{11} - r)C_1 + \ldots + a_{1n}C_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}C_1 + \ldots + (a_{nn} - r)C_n = 0. \end{cases}$$

L'équation $F(r) = 0$ est dite encore l'*équation caractéristique*.

La résolution de l'équation algébrique $F(r) = 0$ de degré n ne fournit pas, comme dans le cas précédent, les diviseurs élémentaires du déterminant $F(r)$. Il y a lieu de les chercher, et ils peuvent être distincts des diviseurs linéaires.

Sans entrer dans le détail du calcul qui résultera de paragraphes plus éloignés, on peut remarquer que toutes les solutions auront la forme de polynomes en $e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_\varrho x}$, dont les coefficients sont eux-mêmes des polynomes en x, et, par suite, le point ∞ est pour les éléments des solutions un point singulier de même nature que pour les fonctions e^{rx}. C'est-à-dire que, dans le domaine du point ∞, les solutions seront composées d'éléments uniformes, et continus en tous les points, sauf au point $x = \infty$, où chaque élément de solution sera de la nature de e^{rx}

Posons

$$x = \frac{1}{x'},$$

le système (A) deviendra

$$(A') \qquad -\frac{dy_i}{dx'} = \frac{1}{x'^2}(a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n),$$

et l'on voit qu'au point $x = \infty$, ou $x' = 0$, tous les coefficients des équations (A') cessent d'être continus.

Pour étudier l'intégration complète du système (A), nous ferons un changement de variable indépendante qui ramènera le système (A) à une forme plus importante que nous étudierons plus loin avec tous les détails nécessaires.

Nous poserons

$$e^x = z$$

et, par suite,

$$e^x\,dx = dz = z\,dx.$$

Il vient alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = z\frac{dy}{dz},$$

et le système (A) deviendra

$$(A'') \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

en rétablissant la lettre x pour désigner la variable indépendante.

C'est sous la forme (A″) et d'une manière tout à fait générale, c'est-à-dire en ne supposant plus que les coefficients a soient des constantes, que nous intégrerons le système (A).

Ajoutons une remarque. Le changement de variable $e^x = z$ donne bien z comme fonction uniforme de x; mais on a $x = \log z$, de sorte que x n'est pas uniforme en z dans toute région du plan qui renferme le point $z = 0$ ou le point $z = \infty$.

79. Nous considérerons maintenant le système le plus général

$$(A) \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{i}y_n,$$

en supposant que les coefficients a soient uniformes dans le domaine de l'origine. Rappelons que l'origine est un point quelconque. Nous supposerons, en outre, que le point $x = 0$ est un point singulier ou non des coefficients a.

Soit $R(\omega)$ le déterminant qui résulte de la considération des éléments d'un système fondamental de solutions, quand la variable x fait le tour de l'origine.

Soit

$$(\omega_k - \omega)^{e_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \rho)$$

un diviseur élémentaire quelconque de R(ω). On peut ramener le déterminant R(ω) à une forme canonique R′(ω), comme on l'a vu dans la théorie des diviseurs élémentaires (Chapitre II, n° 53). Cette forme étant unique, la méthode de recherche d'un système spécial de solution des équations (A) doit conduire précisément aux solutions qui correspondent à la forme canonique R′(ω). Nous avons exposé cette méthode pratique aux n°s 68 et suivants du Chapitre III.

Nous voulons maintenant étudier directement *le* système spécial de solutions des équations (A). Nous considérerons ce système comme étant seul de son espèce, quoiqu'il reste dans sa construction une certaine indétermination. En effet, si deux solutions, par exemple, satisfont aux relations

$$Y_i = \omega y_i \quad \text{et} \quad Y'_i = \omega y'_i,$$

on peut, dans certains cas, les remplacer par des combinaisons

$$a Y_i + b Y'_i, \quad a' Y_i + b' Y'_i,$$

pourvu que le déterminant $ab' - ba'$ soit différent de zéro. Abstraction faite de ces modifications possibles qui n'ont aucune importance dans nos théories, nous pouvons dire que le système spécial de solutions est unique.

Ce système spécial est caractérisé par les équations suivantes.

Soit $(\omega_k - \omega)^{e_k}$ *un diviseur élémentaire quelconque du déterminant* R(ω) *ou de son équivalent* R′(ω), *il y a* e_k *solutions satisfaisant aux relations*

$$(74)\qquad \left\{\begin{aligned} Y^k_{i_1} &= \omega_k y^k_{i_1}, \\ Y^k_{i_2} &= \omega_k y^k_{i_2} + y^k_{i_1}, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ Y^k_{ie_k} &= \omega_k y^k_{ie_k} + y^k_{i,e_k-1}, \end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix}(i = 1, 2, \dots, n) \\ (k = 1, 2, \dots, \rho)\end{matrix}$$

et les n solutions dont les éléments entrent dans ces équations forment un système fondamental.

80. Pour plus de simplicité, considérons un groupe de relations de la forme

$$(75)\qquad \left\{\begin{aligned} Y_1 &= \omega y_1, \\ Y_2 &= \omega y_2 + y_1, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ Y_m &= \omega y_m + y_{m-1}. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$\frac{\log x}{2\pi\sqrt{-1}} = u,$$

de sorte que u augmente de 1 quand la variable x fait le tour de l'origine.

Soit $f(u)$ une fonction entière du degré $m-1$ formée arbitrairement avec u et des coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ uniformes dans le domaine de l'origine. Définissons enfin r par la relation

$$e^{2\pi r\sqrt{-1}} = \omega, \tag{76}$$

et appelons $\Delta_k f(u)$ la différence d'ordre k de $f(u)$ par rapport à l'accroissement 1 de u.

On pourra donner aux fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les formes

$$(77)\quad \begin{cases} y_m = x^r f(u), \\ y_{m-1} = x^r \omega \Delta f(u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{m-k} = x^r \omega^k \Delta_k f(u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_1 = x^r \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f(u). \end{cases}$$

On voit que $\Delta_{m-1} f(u) = 1.2\ldots(m-1)A_{m-1}$ ne contient pas u et que y_1 est la seule fonction y qui ne contienne pas de logarithmes.

D'abord les expressions précédentes satisfont aux relations imposées. En effet, on a

$$Y_{m-k} = x^r\omega^{k+1}\Delta_k f(u+1) = x^r\omega^{k+1}[\Delta_k f(u) + \Delta_{k+1} f(u)] = \omega y_{m-k} + y_{m-k-1}.$$

Ensuite on peut toujours donner aux fonctions $y_1, \ldots, y_m$ les formes précédentes. En effet, $y_1 x^{-r}$ est une fonction uniforme dans le domaine de l'origine, et l'on peut la représenter par $\omega^{m-1}\Delta_{m-1} f(u)$; on tire de là

$$y_1 = x^r\omega^{m-1}\Delta_{m-1} f(u).$$

On peut poser ensuite

$$y_2 = \omega^{m-2} x^r z,$$

d'où

$$Y_2 = \omega^{m-1} x^r Z.$$

Si l'on veut satisfaire à la relation

$$Y_2 = \omega y_2 + y_1,$$

on posera

$$Z = z + \Delta_{m-1} f(u).$$

En représentant par $[\varphi]'$ ce que devient une expression φ, quand on tourne autour de l'origine, et remarquant que l'on a

$$\Delta_{m-1} f(u) = \Delta_{m-2} f(u+1) - \Delta_{m-2} f(u) = [\Delta_{m-2} f(u)]' - \Delta_{m-2} f(u),$$

on voit que l'on a

$$[z - \Delta_{m-2} f(u)]' = z - \Delta_{m-2} f(u);$$

$z - \Delta_{m-2} f(u)$ est donc une fonction uniforme de x. Dans le domaine de l'origine, on peut poser simplement

$$z = \Delta_{m-2} f(u),$$

en réunissant cette fonction uniforme au terme indépendant de $\Delta_{m-2} f(u)$. On a ainsi

$$y_2 = \omega^{m-2} x^r \Delta_{m-2} f(u).$$

On remontera ainsi de proche en proche.

La suite des expressions précédentes montre que l'élément y_m, qui contient la plus haute puissance de $\log x$, renferme les m fonctions de x, uniformes dans le domaine de l'origine, qui entrent dans le groupe des expressions $y_1, \ldots, y_m$.

Les relations entre les coefficients des puissances de u, dans les différents éléments du groupe, sont mises en évidence par la forme des expressions précédentes. Le nombre de ces coefficients est

$$1 + 2 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Il y en a m arbitraires. On peut donc dire que ces éléments sont liés entre eux par

$$\frac{m(m+1)}{2} - m \quad \text{ou} \quad \frac{m(m-1)}{2}$$

relations distinctes.

81. Appliquons les résultats précédents aux fonctions y qui satisfont aux relations (74).

Nous aurons, pour les éléments des solutions du système fondamental spécial, les formes analytiques suivantes, valables dans le domaine de l'origine

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{ie_i}^k = x^r f_i^k(u), \\ y_{i\,e_i-1}^k = x^r \omega \Delta f_i^k(u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{i1}^k = x^r \omega^{e_i-1} \Delta_{e_i-1} f_i^k(u). \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (i = 1, 2, \ldots, n), \\ (k = 1, 2, \ldots, \rho). \end{array}$$

82. Dans les relations (77), posons

$$x = \frac{1}{x'},$$

et, par suite,

$$u = \frac{\log x}{2\pi\sqrt{-1}} = -\frac{\log x'}{2\pi\sqrt{-1}}.$$

Nous aurons, en général,

$$y_{m-k} = \frac{\omega^k}{x'^r} \Delta_k f(u),$$

ou encore

$$y_{m-k} = x'^{-r} \omega^k \Delta_k f(u).$$

Nous poserons

$$e^{-2\pi r \sqrt{-1}} = \omega.$$

Nous en concluons que, dans le domaine de l'infini, nous devrons, dans les formules (78), changer les signes de u et de r.

83. Nous terminerons ces études d'intégration par les séries, en montrant que les éléments des solutions du système général

$$\text{(B)} \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

jouissent de propriétés spéciales qui les rapprochent des fonctions algébriques.

Nous venons de voir que les solutions d'un système (A) quelconque s'obtiennent par des combinaisons linéaires d'expressions de la forme

$$x^r(A_0 + A_1 \log x + \ldots + A_k \log^k x).$$

Si les parenthèses sont infinies d'ordre fini pour $x = 0$, c'est-à-dire si l'on peut trouver un nombre entier α tel que le produit

$$x^\alpha(A_0 + A_1 \log x + \ldots + A_k \log^k x)$$

soit nul pour $x = 0$, on dit, d'après M. Thomé, que, quel que soit r, l'expression

$$x^r(A_0 + \ldots + A_k \log^k x)$$

est *régulière* au point $x = 0$. Il suffit évidemment que les fonctions A ne renferment dans leurs développements qu'un nombre fini de puissances négatives x.

Toute combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'expressions *régulières* étant aussi appelée *régulière*, nous allons montrer que tous les éléments des solutions du système (B) sont des expressions régulières, quand les coefficients a sont holomorphes dans le domaine de l'origine.

84. Voici, d'après M. Horn, la manière d'intégrer le système (B), c'est-à-dire le système

$$(79) \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on a

(80) $$a_{ij} = a_{ij}^0 + x a_{ij}^1 + \ldots,$$

dans le domaine de l'origine.

Soient

(81) $$y_i = x^r \varphi_i = x^r(\varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les éléments d'une solution du système (79). Nous avons déjà vu qu'il existe une telle solution, et que les séries φ_i sont uniformément convergentes dans un certain domaine de l'origine (Chapitre I, n° 4).

En portant les valeurs (81) dans les équations (79), on a les relations en nombre infini

(82) $$\begin{cases} (\alpha) & \sum_j (a_{ij}^0 - r\delta_{ij})\varphi_j^0 = 0, \\ (\beta) & \sum_j [a_{ij}^0 - (r+1)\delta_{ij}]\varphi_j^1 + \sum_j a_{ij}^1 \varphi_j^0 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (\lambda) & \sum_j [a_{ij}^0 - (r+k)\delta_{ij}]\varphi_j^k + \sum_j a_{ij}^1 \varphi_j^{k-1} + \ldots + \sum_j a_{ij}^k \varphi_j^0 = 0, \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{pmatrix}.$$

Toutes les valeurs initiales φ_i^0 des séries φ_i ne sont pas nulles. Donc, d'après les équations (82 α), r doit être l'une des racines de l'équation caractéristique

$$F(r) = |a_{ij}^0 - r\delta_{ij}| = 0.$$

Or, laissons de côté précisément les conditions (82_α); nous pourrons considérer dans toutes les autres la lettre r comme une arbitraire, et nous aurons, par un calcul de proche en proche,

(83) $$\varphi_i^k = \sum_j \frac{\mathcal{F}_{ij}^k(r)}{F(r+1)F(r+2)\ldots F(r+k)} \varphi_j^0,$$

expression dans laquelle $\mathcal{F}$ est une fonction entière des lettres r, a_{ij}^0, a_{ij}^1, ..., a_{ij}^k.

Le dénominateur commun ne peut s'annuler que si $r+1$, $r+2$, ... ou $r+k$ satisfait à un moment donné à l'équation caractéristique $F(r) = 0$.

Appelons r_1, r_2, ..., r_n les n racines, distinctes ou non, de cette équation. On aura à ce moment

$$r + k' = r_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ k' = 1, 2, \ldots, k).$$

Mais k croît indéfiniment dans la suite des relations (82). Il suffit donc d'écrire

$$r = r_\alpha - k \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \infty).$$

On voit ainsi que les φ_i^k seront finis, ou infinis d'un ordre varié.

Fixons maintenant les valeurs des indéterminées $r, \varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$ d'après les règles suivantes :

1° Soit un groupe

$$r_{\alpha_1},\quad r_{\alpha_2},\quad \ldots,\quad r_{\alpha_\mu}$$

de μ racines de l'équation caractéristique, telles que deux quelconques de ces racines diffèrent d'un nombre entier.

Il peut y avoir d'autres groupes pareils à celui-là.

Nous supposerons que la suite de ces valeurs ne va pas en croissant, et nous poserons

$$(84)\qquad \begin{cases} r_{\alpha_{\mu-1}} = r_{\alpha_\mu} \;\; + d_\mu, \\ r_{\alpha_{\mu-2}} = r_{\alpha_{\mu-1}} + d_{\mu-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_{\alpha_1} \;\; = r_{\alpha_2} \;\; + d_2, \end{cases}$$

$d_2, d_3, \ldots, d_\mu$ étant des nombres entiers positifs.

Ces relations peuvent encore s'écrire

$$(84')\qquad \begin{cases} r_{\alpha_{\mu-1}} = r_{\alpha_\mu} + d_\mu, \\ r_{\alpha_{\mu-2}} = r_{\alpha_\mu} + d_{\mu-1} + d_\mu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_\alpha \;\; = r_{\alpha_\mu} + d_2 \;\; + d_3 + \ldots + d_{\mu-1} + d_\mu. \end{cases}$$

Si les nombres r sont imaginaires, c'est sur la partie réelle que porte le calcul.

La conséquence que nous avons en vue est la suivante. Toutes les expressions

$$\begin{array}{l} \mathrm{F}(r + d_\mu), \\ \mathrm{F}(r + d_{\mu-1} + d_\mu), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{F}(r + d_2 + \ldots + d_{\mu-1} + d_\mu) \end{array}$$

s'annulent pour

$$r = r_{\alpha_\mu},$$

que nous représenterons seulement par r_α.

2° Nous prendrons les arbitraires φ_i^0 dont les valeurs proportionnelles interviennent seules dans le calcul, avec un facteur $r - r_\alpha$ élevé à une puissance nécessaire et suffisante pour que toutes les expressions φ_i^k restent finies et ne s'annulent pas toutes pour $r = r_\alpha$.

3° Enfin nous donnerons à r une des valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_n$ qui satisfont à l'équation caractéristique, et nous choisirons les quantités φ_i^0 de manière à satisfaire aux équations (82_α).

Il est évident que les expressions y_i (81) ainsi déterminées satisferont aux équations (79), et que les séries φ_i seront absolument convergentes dans un certain domaine de l'origine, comme au n° 4 du Chapitre I.

Voici maintenant les résultats généraux du calcul ainsi préparé. Représentons par

$$f_i(y_1, \ldots, y_n) = -x\frac{dy_i}{dx} + \sum_j a_{ij}y_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{85}$$

les expressions qui, égalées à zéro, donnent les équations (79).

En supposant d'abord les lettres r et φ_i^0 indéterminées, nous aurons identiquement

$$f_i(x^r\varphi_1, \ldots, x^r\varphi_n) = x^r\sum_j (a_{ij}^0 - r\delta_{ij})\varphi_j^0. \tag{86}$$

Choisissons $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$, de sorte qu'aucune des quantités φ_i^k ne devienne infinie pour $r = r_\alpha$, et en outre de manière que

$$f_i(x^r\varphi_1, \ldots, x^r\varphi_n)$$

s'annule h fois pour $r = r_\alpha$, h étant un nombre entier quelconque. Nous devons avoir

$$\left[\frac{\partial^\lambda f_i}{\partial r^\lambda}\right]_{(r=r_\alpha)} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, h-1). \tag{87}$$

Mais

$$\frac{\partial^\lambda f_i}{\partial r^\lambda} = f_i\left(\frac{\partial^\lambda y_1}{\partial r^\lambda}, \ldots, \frac{\partial^\lambda y_n}{\partial r^\lambda}\right). \tag{88}$$

Nous voyons, par suite, que l'on peut former les h solutions suivantes du système (79)

$$y_i = \left[\frac{\partial^\lambda(x^r\varphi_i)}{\partial r^\lambda}\right]_{(r=r_\alpha)}$$

ou

$$\begin{aligned} y_i = x^{r_\alpha}\Bigg[&\frac{\partial^\lambda\varphi_i}{\partial r^\lambda} + \frac{\lambda}{1}\frac{\partial^{\lambda-1}\varphi_i}{\partial r^{\lambda-1}}\log x + \ldots \\ &+ \binom{\lambda}{\lambda-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\log^{\lambda-1}x + \varphi_i\log^\lambda x\Bigg]_{(r=r_\alpha)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, h-1). \end{aligned} \tag{89}$$

Les parenthèses de ces expressions, renfermant les dérivées de séries uniformément convergentes, auront pour les puissances de $\log x$ des coefficients, eux-mêmes uniformément convergents.

C'est avec ce programme général de calcul que nous allons construire un système fondamental de n solutions du système (79). Nous emploierons maintenant les notations de M. Horn, en les modifiant très légèrement.

85. Nous préparerons d'abord le système différentiel

$$(79)\qquad \begin{cases} x\dfrac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta A_{\alpha\beta} y_\beta & (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m), \\ A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + x a'_{\alpha\beta} + x^2 a''_{\alpha\beta} + \ldots . \end{cases}$$

Multiplions ces équations par des constantes encore indéterminées $u_1, u_2, \ldots, u_m$ et ajoutons les résultats. Nous aurons une équation de la forme

$$(90)\qquad x\frac{d\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha}{dx} = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} u_\alpha y_\beta .$$

On peut ramener les deux formes bilinéaires

$$\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha\beta} a^0_{\alpha\beta} u_\alpha y_\beta$$

aux deux *formes canoniques* (*Théorie des diviseurs élémentaires*)

$$\sum_\alpha v_\alpha z_\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha\beta} b^0_{\alpha\beta} v_\alpha z_\beta .$$

Les substitutions employées sont de la forme

$$u_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha\beta} v_\beta, \qquad y_\alpha = \sum_\beta h_{\alpha\beta} z_\beta,$$

ou encore

$$v_\beta = \sum_\alpha h_{\alpha\beta} u_\alpha, \qquad z_\beta = \sum_\alpha g_{\alpha\beta} y_\alpha,$$

à cause de la forme de l'expression

$$\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha .$$

Or, les v étant indéterminés, ainsi que les u, on pourra transformer le système (79) en un autre

$$(91)\qquad x\frac{dz_\alpha}{dx} = \sum_\beta P_{\alpha\beta} z_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

où l'on aura

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} g_{\lambda\alpha} h_{\mu\beta} = p_{\alpha\beta} + x p'_{\alpha\beta} + x^2 p''_{\alpha\beta} + \ldots.$$

Considérons maintenant l'équation caractéristique du nouveau système différentiel

$$P(p) = |a_{\alpha\beta} - p\,\delta_{\alpha\beta}| = (p_1 - p)\ldots(p_m - p) = 0.$$

Soit $p - p_\alpha$ un diviseur élémentaire simple de $P(p)$, on aura

$$p_{\alpha\alpha} = p_\alpha, \quad p_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, m),$$

et à ce diviseur correspondra l'équation

$$x\frac{dz_\alpha}{dx} = p_\alpha z_\alpha + x\sum_\beta p'_{\alpha\beta} z_\beta + \ldots.$$

Supposons ensuite que l'on ait

$$p_{\alpha'} = p_{\alpha''} = \ldots = p_{\alpha^{(e)}} = p_0$$

et que $(p - p_0)^e$ soit un diviseur multiple d'ordre e de $P(p)$, nous aurons

$$(92) \qquad \begin{cases} p_{\alpha'\alpha'} = p_0, & p_{\alpha''\alpha''} = p_0, & \ldots, & p_{\alpha^{(e)}\alpha^{(e)}} = p_0, \\ p_{\alpha''\alpha'} = 1, & p_{\alpha'''\alpha''} = 1, & \ldots, & p_{\alpha^{(e)}\alpha^{(e-1)}} = 1, \end{cases}$$

et tous les autres $p_{\alpha\beta}$ seront nuls. Donc, au diviseur considéré correspondront les équations

$$(93) \qquad \begin{cases} x\dfrac{dz_{\alpha'}}{dx} = p_0 z_{\alpha'} + \ldots, \\ x\dfrac{dz_{\alpha''}}{dx} = p_0 z_{\alpha''} + z_{\alpha'} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x\dfrac{dz_{\alpha^{(e)}}}{dx} = p_0 z_{\alpha^{(e)}} + z_{\alpha^{(e-1)}} + \ldots; \end{cases}$$

les parties des seconds membres remplacées par des points sont des expressions telles que

$$x\sum_\beta p'_{\alpha\beta} z_\beta + x^2 \sum_\beta p''_{\alpha\beta} z_\beta + \ldots.$$

Cette préparation des équations a pour résultat : 1° de simplifier les calculs qu'on aura à faire plus loin ; 2° de préciser le sens des indices 1, 2, ..., m qu'on attribue aux racines de l'équation caractéristique. Nous considérerons plus loin des groupes de quantités

$$p_{\lambda_1}, \quad p_{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad p_{\lambda_r},$$

dont la signification est dès maintenant précisée.

Ces r solutions sont linéairement indépendantes, car, si l'on avait

$$\sum_\lambda C_\lambda \varepsilon_\alpha^\lambda = 0 \qquad (\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_r),$$

on en déduirait

$$\sum_\lambda C_\lambda \zeta_\alpha^0 (x)_\lambda = 0,$$

et, pour $x = 0$,

$$C_\lambda \varepsilon_\lambda = 0 \qquad (\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_r),$$

ce qui est impossible, à moins que les constantes C_λ ne soient toutes nulles.

Deuxième cas. — *Les racines $p_{\lambda^0}, \ldots, p_{\lambda^n}$ fournissent, d'une part, des groupes de $r^0, r^1, \ldots, r^n$ racines égales entre elles*

$$p_{\lambda_1^0} = p_{\lambda_2^0} = \ldots = p_{\lambda_{r^0}^0} = p_{\lambda^0} = p_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_{\lambda_1^n} = p_{\lambda_2^n} = \ldots = p_{\lambda_{r^n}^n} = p_{\lambda^n} = p_n,$$

et, d'autre part,

r^0 diviseurs élémentaires simples		*$p - p_0$ de $P(p)$,*
r^1	»	$p - p_1$,
....		....
r^n	»	$p - p_n$.

D'ailleurs, entre $p_0, p_1, \ldots, p_n$ et toute autre racine qui ne soit égale à aucune d'elles, il n'existe pas de différence entière. Enfin les différences

$$p_0 - p_1 = d_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$p_{n-1} - p_n = d_n$$

sont des nombres entiers positifs.

Considérons un groupe quelconque correspondant à l'indice i, et posons

(97) $$(\zeta_{\lambda^i})_0 = \varepsilon_{\lambda^i}(p - p_i)^i, \qquad (\zeta_\alpha)_0 = 0 \qquad (\alpha \neq \lambda^i,\ \lambda^i = \lambda_1^i; \lambda_2^i; \ldots; \lambda_{r^i}^i);$$

nous aurons, en vertu des équations (86) et (93),

$$P_{\lambda^i}(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = -\varepsilon_{\lambda^i}(p - p_i)^{i+1}x^p,$$
$$P_\alpha(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = 0 \qquad (\alpha \neq \lambda^i).$$

ce qui est impossible si les C_{λ^n} ne sont pas tous nuls. De même les $C_{\lambda^{n-1}}$ seront tous nuls, etc.

Troisième cas. — *La racine p_0 de l'équation caractéristique fournit les diviseurs élémentaires*

$$(p-p_0)^{e_{\lambda_1}}, \quad \ldots, \quad (p-p_0)^{e_{\lambda_r}}$$

du déterminant $P(p)$. *D'ailleurs, entre p_0 et toute racine qui ne lui serait pas égale, il n'existe pas de différence entière.*

Au diviseur élémentaire $(p-p_0)^{e_\lambda}$ correspondent par exemple les équations

$$(100)\qquad \left\{\begin{aligned} &x\,\frac{dz_{\alpha'}}{dx} = p_0 z_{\alpha'} + \ldots, \\ &x\,\frac{dx_{\alpha''}}{dx} = p_0 z_{\alpha''} + z_{\alpha'} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &x\,\frac{dz_{\alpha^{(e_\lambda)}}}{dx} = p_0 z_{\alpha^{(e_\lambda)}} + z_{\alpha^{(e_\lambda)}} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Posons, en conséquence,

$$(101)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\zeta_{\alpha'})_0 = \varepsilon_\lambda (p-p_0)^{e_\lambda - 1}, \\ &(\zeta_{\alpha''})_0 = \varepsilon_\lambda (p-p_0)^{e_\lambda - 2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &(\zeta_{\alpha^{(e_\lambda)}})_0 = \varepsilon_\lambda, \end{aligned}\right.$$

ε_λ étant une constante, et prenons nulles toutes les autres quantités $(\zeta_\alpha)_0$. Soient $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha(x)_\lambda$ les séries déterminées dans ces conditions.

Nous aurons les relations

$$(102)\qquad \left\{\begin{aligned} &P_{\alpha'}(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = -\varepsilon_\lambda (p-p_0)^{e_\lambda}, \\ &P_\alpha(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = 0 \qquad (\alpha \neq \alpha'). \end{aligned}\right.$$

En effet, on a, par exemple, identiquement

$$(p_0 - p)(\zeta_{\alpha''})_0 + (\zeta_{\alpha'})_0 = 0.$$

Posons alors

$$(103)\qquad \left\{\begin{aligned} &[\zeta_\alpha(x)_\lambda]_{p_0} = \zeta_\alpha^0(x)_\lambda, \\ &\left[\frac{\partial \zeta_\alpha(x)_\lambda}{\partial p}\right]_{p_0} = \zeta_\alpha^1(x)_\lambda, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\left[\frac{\partial^{e_\lambda - 1}\zeta_\alpha(x)_\lambda}{(\partial p)^{e_\lambda - 1}}\right]_{p_0} = \zeta_\alpha^{e_\lambda - 1}(x)_\lambda. \end{aligned}\right.$$

Les seconds membres ne seront pas tous nuls pour $x = 0$. En effet, d'après

les formules (101),

$$\zeta_{\alpha}^{0},\quad \zeta_{\alpha e_\lambda}^{1},\quad \ldots,\quad \zeta_{\alpha e_\lambda}^{e_\lambda - 1}$$

se réduisent à ε_0 pour $x = 0$.

En conséquence, on peut former le groupe de e_λ solutions

$$(104)\quad \begin{cases} z_\alpha^{\lambda,0} = x^{p_0}\,\zeta_\alpha^{0}(x)_0, \\ z_\alpha^{\lambda,1} = x^{p_0}\,[\zeta_\alpha^{1}(x)_0 - \zeta_\alpha^{0}(x)_0 \log x], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_\alpha^{\lambda,e_\lambda-1} = x^{p_0}\left[\zeta_\alpha^{e_\lambda-1}(x)_0 - \binom{e_\lambda-1}{1}\zeta_\alpha^{e_\lambda-2}(x)_0\log x - \ldots - \zeta_\alpha^{0}(x)_\lambda \log^{e_\lambda-1} x\right], \end{cases}$$

appartenant toutes à l'exposant p_0.

On remarquera que la dernière relation fait connaître toutes les autres, puisqu'elle renferme tous leurs coefficients.

Les solutions (104) sont linéairement indépendantes; car, si l'on avait la relation

$$\sum_\lambda (C_{\lambda,0}\, z_\alpha^{\lambda,0} + \ldots + C_{\lambda,e_\lambda-1}\, z_\alpha^{\lambda,e-1}) = 0,$$

en divisant par x^{p_0} les diverses équations qui s'obtiennent en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de $\log x$, on reconnaîtrait qu'en faisant $x = 0$ on doit avoir

$$C_{\lambda,h} = 0.$$

Quatrième cas. — C'est le cas général.

Les racines $p_0, p_1, \ldots, p_n$ de l'équation caractéristique fournissent les diviseurs élémentaires

$$\begin{array}{ll} (p - p_0)^{e_{\lambda^0}} & (\lambda^0 = \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\mu_0}^0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p - p_n)^{e_{\lambda^n}} & (\lambda^n = \lambda_1^n, \ldots, \lambda_{\mu_n}^n). \end{array}$$

D'ailleurs, entre ces racines et toute autre racine qui ne serait pas égale à l'une d'elles, il n'existe pas de différence entière. Enfin les différences

$$\begin{array}{l} p_0 - p_1 = d_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_{n-1} - p_n = d_n \end{array}$$

sont des nombres entiers positifs, de sorte que l'on a

$$(105)\quad \begin{cases} p_{n-1} = p_n + d_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_0 = p_n + d_n + \ldots + d_1. \end{cases}$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{e_\lambda}$ les indices correspondant au diviseur élémentaire

$(p-p_i)^{e_{\lambda^i}}$ dans le système d'équations différentielles en z. Posons

$$(106)\quad \begin{cases} (\zeta_{\alpha_1})_0 \;\;= \varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}+e_{\lambda^i}-1}, \\ (\zeta_{\alpha_2})_0 \;\;= \varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}+e_{\lambda^i}-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (\zeta_{\alpha_{e_{\lambda^i}-1}})_0 = \varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}+1}, \\ (\zeta_{\alpha_{e_{\lambda^i}}})_0 \;\;= \varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}}, \end{cases}$$

où ε_{λ^i} est une constante ou une fonction de p qui ne s'annule pas pour $p=p_i$. On prend nuls tous les autres $(\zeta_\alpha)_0$. Soient ζ_α les séries $\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}$ déterminées dans ces conditions, il vient

$$\mathrm{P}_{\alpha_1}(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = -\varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{e^0+\ldots+e^{i-1}+e_{\lambda^i}}x^p,$$
$$\mathrm{P}_\alpha(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = 0 \qquad (\alpha \neq \alpha_1).$$

Si l'on prend pour e^k le plus grand des nombres e_{λ^k}, et si l'on pose

$$(107)\quad \begin{cases} l^0 \;\;= e^0, \\ l^1 \;\;= e^0+e^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l^{i-1} = e^0+\ldots+e^{i-1}, \\ l_{\lambda^i} \;= e^0+\ldots+e^{i-1}+e_{\lambda^i}, \end{cases}$$

on obtiendra les solutions

$$(108)\quad \begin{cases} z_\alpha = \left[\dfrac{\partial^{\mu^0}(x^p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu^0}}\right]_{p_i} & (\mu^0 = 0, \ldots, l^0-1), \\ z_\alpha = \left[\dfrac{\partial^{\mu^1}(x^p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu^1}}\right]_{p_i} & (\mu^1 = l^0, \ldots, l^1-1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_\alpha = \left[\dfrac{\partial^{\mu^{i-1}}(x_p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu^{i-1}}}\right]_{p_i} & (\mu^{i-1} = l^{i-2}, \ldots, l^{i-1}+1), \\ z_\alpha = \left[\dfrac{\partial^{\mu_{\lambda^i}}(x^p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}}}\right]_{p_i} & (\mu_{\lambda^i} = l^{i-1}, \ldots, l_{\lambda^i}-1). \end{cases}$$

Ensuite les formules générales (82) (excepté la première) donneront

$$(\zeta_\alpha)_\nu = \sum_{h=1}^{h=e_{\lambda^i}} \frac{Q^\nu_{\alpha\alpha_h}(p).(p-p_i)^{h-1}}{\mathrm{Q}(p+1)\ldots\mathrm{Q}(p+\nu)}\,\varepsilon_{\lambda^i}(p-p_i)^{l^{i-1}},$$

où

$$\mathrm{Q}(p) = (p-p_0)^{e^0}(p-p_1)^{e^1}\ldots(p-p)^{e^n},$$

et où $Q(p)$ est une fonction rationnelle de p, qui ne s'annule pas pour $p=p_0$, $p_1, \ldots, p_n$.

Par conséquent, pour $p=p_i$,

$$\begin{array}{llll} (\zeta_\alpha)_0, \ldots & (\zeta_\alpha)_{d_i-1} & \text{s'annulent au degré} & l^{i-1}, \\ (\zeta_\alpha)_{d_i}, \ldots & (\zeta_\alpha)_{d_i+d_{i-1}-1} & \text{»} & l^{i-2}, \\ \ldots\ldots\ldots & & & , \\ (\zeta_\alpha)_{d_i+\ldots+d_2}, & \ldots, (\zeta_\alpha)_{d_i+\ldots+d_1-1} & \text{»} & l^1, \\ (\zeta_\alpha)_{d_i+\ldots+d_1}, & \ldots, (\zeta_\alpha)_{d_i+\ldots+d_0-1} & \text{»} & l^0, \end{array}$$

et l'on peut écrire

$$(109)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^{\mu^0}\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}}{(\partial p)^{\mu^0}}\right]_{p_i} = x^{d_i+\ldots+d_1}\zeta_\alpha^{0,\rho^0}(x)_{\lambda^i},\\ &\left[\frac{\partial^{\mu^1}\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}}{(\partial p)^{\mu^1}}\right]_{p_i} = x^{d_i+\ldots+d_2}\zeta_\alpha^{1,\rho^1}(x)_{\lambda^i},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^i}}\zeta_\alpha(x)_{\lambda^i}}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}}}\right]_{p_i} = \zeta_\alpha^{\rho_{\lambda^i}}(x)_{\lambda^i}, \end{aligned}\right.$$

où l'on a

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \rho^0 = 0, \quad \ldots, \quad e^0 - 1,\\ \mu^1 - l^0 &= \rho^1 = 0, \quad \ldots, \quad e^1 - 1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mu^{i-1} - l^{i-2} &= \rho^{i-1} = 0, \quad \ldots, \quad e^{i-1} - 1,\\ \mu_{\lambda^i} - l^{i-1} &= \rho_{\lambda^i} = 0, \quad \ldots, \quad e_{\lambda^i} - 1. \end{aligned}$$

On obtient ainsi e_{λ^i} solutions

$$z_\alpha = \left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^i}}(x^p\zeta_\alpha)}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}}}\right]_{p_i}$$

ou

$$(110)\quad z_\alpha = x^{p_i}\left\{\left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^i}}\zeta_\alpha}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}}}\right]_{p_i} + \binom{\mu_{\lambda^i}}{1}\left[\frac{\partial^{\mu_{\lambda^i}-1}\zeta_\alpha}{(\partial p)^{\mu_{\lambda^i}-1}}\right]_{p_i}\log x + \ldots + \binom{\mu_{\lambda^i}}{\mu_{\lambda^i}}(\zeta_\alpha)_{p_i}\log^{\mu_{\lambda^i}} x\right\}$$

$$(\mu_{\lambda^i} = l^{i-1}, \ \ldots, \ l_{\lambda^i}$$

appartenant à l'exposant p_i.

Il suffit de connaître la dernière de ces solutions pour connaître toute autres, c'est-à-dire celle qui correspond à $\mu_{\lambda^i} = l_{\lambda^i} - 1$. Pour avoir leurs exp sions développées, posons

$$(111)\quad \left\{\begin{aligned} Z_\alpha\ (x)_{\lambda^i} &= \zeta_\alpha^{e_{\lambda^i}-1}(x)_{\lambda^i} + \binom{l_{\lambda^i}-1}{1}\zeta_\alpha^{e_{\lambda^i}-2}(x)_{\lambda^i}\log x + \ldots\\ &\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e_{\lambda^i}-1}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^i}\log^{e_{\lambda^i}-1}x,\\ Z_\alpha^{i-1}(x)_{\lambda^i} &= \binom{l_{\lambda^i}-1}{e_{\lambda^i}}\zeta_\alpha^{i-1,e^{i-1}-1}(x)_{\lambda^i}\\ &\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e_{\lambda^i}+1}\zeta_\alpha^{i-1,e^{i-1}-2}(x)_{\lambda^i}\log x\\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e^{i-1}+e_{\lambda^i}-1}\zeta_\alpha^{i-1,0}(x)_{\lambda^i}\log^{e^{i-1}-1}x,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ Z_\alpha^0(x)_{\lambda^i} &= \binom{l_{\lambda^i}-1}{e^1+\ldots+e_{\lambda^i}}\zeta_\alpha^{0,e^0-1}(x)_{\lambda^i}\\ &\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e^1+\ldots+e_{\lambda^i}+1}\zeta_\alpha^{0,e^0-2}(x)_{\lambda^i}\log x\\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad + \binom{l_{\lambda^i}-1}{e^0+\ldots+e_{\lambda^i}-1}\zeta_\alpha^{0,0}(x)_{\lambda^i}\log^{e^0-1}x. \end{aligned}\right.$$

Les valeurs initiales de

$$\zeta_{\alpha_{e_{\lambda^i}}}^{e_{\lambda^i}-1}(x)_{\lambda^i}, \quad \ldots, \quad \zeta_{\alpha_1}^{0}(x)_{\lambda^i}$$

n'étant pas nulles, les logarithmes ne disparaîtront pas de ces formules.

Les solutions cherchées sont enfin

$$(112)\quad \begin{cases} z_\alpha^{\lambda^0} = x^{p_0}\,Z_\alpha(x)_{\lambda^0}, \\ z_\alpha^{\lambda^1} = x^{p_1}\,Z_\alpha(x)_{\lambda^1} + x^{p_0}\,Z_\alpha^0(x)_{\lambda^1}\log^{e_{\lambda^1}} x, \\ z_\alpha^{\lambda^2} = x^{p_2}\,Z_\alpha(x)_{\lambda^2} + x^{p_1}\,Z_\alpha^1(x)_{\lambda^2}\log^{e_{\lambda^2}} x + x^{p_0}\,Z_\alpha^0(x)_{\lambda^2}\log^{e^1+e_{\lambda^2}} x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_\alpha^{\lambda^n} = \quad x^{p_n}\;Z_\alpha\;(x)_{\lambda^n} \\ \qquad + x^{p_{n-1}}\,Z_\alpha^{n-1}(x)_{\lambda^n}\log^{e_{\lambda^n}} x \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + x^{p_0}\;Z_\alpha^0\;(x)_{\lambda^n}\log^{e^1+\ldots+e_{\lambda^n}} x \qquad (\lambda^0 = \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{r^0}^0;\ \ldots;\ \lambda^n = \lambda_1^n, \ldots, \lambda_{r^n}^n). \end{cases}$$

Les degrés des fonctions Z en $\log x$ sont respectivement

$$e_{\lambda^i}-1, \quad e^{i-1}-1, \quad \ldots, \quad e^0-1.$$

Les solutions précédentes sont linéairement indépendantes, comme on pourrait le démontrer par le même procédé qui a servi dans les autres cas.

87. Il ne reste plus à démontrer qu'une seule proposition : *Toutes les solutions calculées forment un système fondamental.*

Après ce qu'on a déjà vu, il suffit de faire voir qu'*il ne peut exister aucun groupe de n relations identiques de la forme*

$$(113)\qquad C_1 A_{i1} + \ldots + C_\mu A_{i\mu} = 0$$

entre des solutions formant l'ensemble A_{i_1} *appartenant à un exposant* r_1, *des solutions formant l'ensemble* A_{i_2} *appartenant à l'exposant* r_2, ..., *des solutions formant l'ensemble* $A_{i\mu}$ *appartenant à l'exposant* r_μ, les C étant d'ailleurs des constantes, et les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ n'ayant entre eux aucune différence entière, *à moins que séparément on n'ait*

$$A_{i1} = 0, \quad \ldots, \quad A_{i\mu} = 0.$$

Mais on sait que chacune de ces conditions particulières est impossible dans le problème d'intégration qui nous a occupé. Donc on pourra, après avoir démontré la proposition qu'on vient d'énoncer, affirmer que les solutions précédemment obtenues forment un système fondamental.

Faisons, en effet, tourner x autour de l'origine un nombre $\mu - 1$ de fois, et désignons par

$$B_{i1}^{\eta_1},\quad B_{i2}^{\eta_2},\quad \ldots,\quad B_{i\mu}^{\eta_\mu}$$

les coefficients des plus hautes puissances de $\log x$ dans les groupements $A_{i1}, \ldots, A_{i\mu}$. Nous aurons

$$\begin{array}{r}
C_1 A_{i1} + \ldots + \quad C_\mu A_{i\mu} = 0,\\
\omega_1 C_1 A_{i1} + \ldots + \quad \omega_\mu C_\mu A_{i\mu} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega_1^{\mu-1} C_1 A_{i1} + \ldots + \omega_\mu^{\mu-1} C_\mu A_{i\mu} = 0,
\end{array}$$
$$(\omega = e^{2\pi\sqrt{-1}}).$$

Éliminant les C entre ces équations, on aura une équation qu'on pourra ordonner en $\log x$ et qui aura la forme

$$P_{i1} + P_{i2} \log x + \ldots + P_{i\eta} \log^{\eta} x = 0.$$

Les coefficients de cette équation seront d'ailleurs uniformes et, comme cette équation étant algébrique en $\log x$ ne peut admettre une infinité de racines, on devra avoir séparément

$$P_{i\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \eta).$$

En particulier, on aura

$$P_{i\eta} = 0$$

ou encore

$$(114)\qquad P_{i\eta} = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \omega_1 & \ldots & \omega_\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{\mu-1} & \ldots & \omega_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix} B_{i1}^{\eta_1} \ldots B_{i\mu}^{\eta_\mu} = 0.$$

Comme aucun des facteurs de $P_{i\eta}$ n'est nul, l'hypothèse faite est inadmissible, et le théorème qu'on avait en vue est démontré.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. J. TANNERY.

Dans son intéressant Mémoire sur les *Systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes,* M. Sauvage expose, en me l'attribuant, une méthode pour former l'équation différentielle linéaire

$$U_0 \frac{d^n y}{dx^n} + U_1 \frac{d^{n-1}_y}{dx^{n-1}} + \ldots + U_n y = 0$$

que vérifient les n solutions y_1, y_2, ..., y_n d'une équation algébrique entière

$$f(x, y) = 0$$

entre x, y de degré n en y. C'est M. Hermite, dont je n'ai pas besoin de vanter ici la bienveillance, qui m'avait indiqué cette méthode. M. Sauvage a d'ailleurs augmenté l'intérêt de cet exemple en montrant le caractère d'une racine x' de l'équation $U_0 = 0$ qui n'est pas une valeur critique pour aucune des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$; il existe alors un système de constantes C_1, C_2, ..., C_n telles que le développement de la fonction

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

suivant les puissances de $x - x'$, commence par un terme de degré n au moins, et l'on a ainsi un exemple très net et très simple de points qui ne sont singuliers qu'en apparence.

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LINÉAIRES ET HOMOGÈNES,

PAR L. SAUVAGE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

CHAPITRE V.

DES SYSTÈMES RÉGULIERS.

88. Nous avons vu que les systèmes de la forme (B) ou (79)

$$x\frac{dy_i}{dx} = \sum_j a_{ij} y_j$$

(Chap. IV, nos 83 et suivants), où les a sont des fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine, ont toutes leurs solutions régulières, c'est-à-dire que les éléments de chaque solution demeurent finis dans le domaine de l'origine, quand on les a préalablement multipliés par une puissance convenable de x.

Les systèmes précédents ne sont pas les seuls à être ce que nous appellerons maintenant des *systèmes réguliers*. En effet, si l'on pose

$$y_i = x^{h_i} z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et, par suite,

$$\frac{dy_i}{dx} = x^{h_i}\left(\frac{dz_i}{dx} + \frac{h_i}{x} z_i\right),$$

le système différentiel (79) devient

$$\frac{dz_1}{dx} = \frac{a_{11} - h_1}{x} z_1 + \frac{a_{12}}{x^{h_1 - h_2 + 1}} z_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{x^{h_1 - h_n + 1}} z_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{dz_n}{dx} = \frac{a_{n1}}{x^{h_n - h_1 + 1}} z_1 + \frac{a_{12}}{x^{h_n - h_2 + 1}} z_2 + \ldots + \frac{a_{nn} - h_n}{x} z_n,$$

et, sous cette nouvelle forme, le système est encore régulier.

Le système

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \alpha_{11}^0 + \alpha_{11}^1 x + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \alpha_{12}^0 + \alpha_{12}^1 x + \ldots\right) y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \alpha_{21}^0 + \alpha_{21}^1 x + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} + \alpha_{22}^0 + \alpha_{22}^1 x + \ldots\right) y_2,$$

qui ne rentre dans aucune des deux formes précédentes, est aussi régulier. Car, si l'on pose

$$z_1 = y_1 - y_2, \qquad z_2 = y_1 - y_2,$$

on aura, pour déterminer z_1 et z_2, un système différentiel de la forme

$$\frac{dz_1}{dx} = \left(\frac{1}{x} + \ldots\right) z_1 + \left(-\frac{2}{x^2} + \ldots\right) z_2,$$
$$\frac{dz_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x} - \ldots\right) \frac{z_1 + z_2}{2} + \left(\frac{1}{x} + \ldots\right) \frac{z_1 - z_2}{2},$$

et, si l'on remplace z_2 par $x z_2$, on obtiendra un système de la forme (B).

On voit donc qu'il y a une grande variété de systèmes réguliers. Nous allons montrer que l'on peut tous les rattacher à ceux d'entre eux qui ont la forme (79) ou (B), et que, pour cette raison, nous appellerons des *systèmes réguliers canoniques*.

89. Soit

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{115}$$

un système d'équations différentielles linéaires et homogènes, telles que, dans le domaine de l'origine, les coefficients a soient uniformes et continus, sauf à l'origine, et que les éléments des solutions multipliés par des puissances convenables de x restent finis.

Pour le point $x = \infty$, on multiplierait les éléments des solutions par des puissances convenables de $\frac{1}{x}$.

Les solutions seront, comme nous allons le rappeler, formées de la manière suivante.

Nous avons vu au Chapitre IV (nos 80 et suivants) que l'on peut former un système fondamental de solutions du système (115), tel que ces solutions se partagent en groupes distincts dont les éléments prennent les formes

$$\left\{\begin{array}{l} y_{i1} = x^{r}\omega^{m-1}\Delta_{m-1} f_i(u), \\ y_{i2} = x^{r}\omega^{m-2}\Delta_{m-2} f_i(u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{i,m-k} = x^{r}\omega^{k}\Delta_{k} f_i(u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{im} = x^{r} f_i(u). \end{array}\right. \tag{116}$$

où l'on a

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

(117) $$\omega = e^{2\pi r\sqrt{-1}},$$

(118) $$u = \frac{\log x}{2\pi\sqrt{-1}},$$

où $\Delta_k f(u)$ représente la différence d'ordre k de $f(u)$ par rapport à l'accroissement 1 de u, et enfin où ω est une racine de l'équation fondamentale en ω, fournissant un diviseur élémentaire de degré m.

On sait que u augmente de 1 quand x fait le tour de l'origine.

L'équation (117) ne détermine r qu'à un nombre entier quelconque près.

Les polynomes en u, $f_i(u)$ fournissent des différences $\Delta_k f_i(u)$ qui sont elles-mêmes des polynomes, et y_{i1} est la seule solution où n'entre pas forcément u, et par suite $\log x$.

Ces principes étant rappelés, formons le système différentiel caractérisé par des relations de la forme (116), mais où les solutions sont régulières. On supposera que toutes les valeurs de r sont déterminées de manière que les coefficients de u dans les polynomes $f_i(u)$ soient holomorphes, ce qui sera suffisant pour la régularité.

Or, on sait qu'on a (Chap. III, n° 63)

$$\mathrm{D}a_{ij} = \begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & \frac{dy_{i1}}{dx} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & \frac{dy_{in}}{dx} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

D étant le déterminant du système fondamental de solutions, et a_{ij} un coefficient quelconque des équations (115). Il résulte de la forme de a_{ij} que ce coefficient est régulier comme les éléments y_{ij} et leurs dérivées $\frac{dy_{ij}}{dx}$. On peut donc remplacer a_{ij} par $\frac{a_{ij}}{x^{\alpha_{ij}}}$ dans les équations (115), et dire que tous les systèmes réguliers ont la forme

(119) $$\frac{dy_i}{dx} = \sum_j \frac{a_{ij}}{x^{\alpha_{ij}}} y_j,$$

où les coefficients a_{ij} sont holomorphes dans le domaine de l'origine.

Étudions aussi le déterminant

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le système fondamental de solutions de la forme (116) peut être choisi tel que, si l'on pose

$$y_{ij} = x^r P_{ij}(\log x),$$

P étant la caractéristique d'un polynome, les coefficients de ce polynome restent holomorphes dans le domaine de l'origine. Dans ces conditions on pourra poser

$$D = x^R \Pi(\log x),$$

Π désignant aussi un polynome à coefficients holomorphes. Si la variable x fait le tour de l'origine, on sait qu'on aura

$$D_1 = CD,$$

où D_1 sera la nouvelle valeur de D, et C un déterminant de constantes. Donc, si l'on pose

$$C = e^{2\pi\rho\sqrt{-1}},$$

le produit $Dx^{-\rho}$ sera uniforme dans le domaine de l'origine, et l'on pourra poser simplement

$$D = x^\rho \Psi(x),$$

où $\Psi(x)$ sera holomorphe.

Cela suffit pour que les logarithmes disparaissent de $\Pi(\log x)$. Posons, en effet,

$$\Pi(\log x) = p_0 + p_1 \log x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x,$$

$p_0, p_1, \ldots, p_\lambda$ représentant des fonctions holomorphes, et identifions les deux formes de D. Nous aurons

$$(120) \qquad x^\rho \Psi(x) = x^R (p_0 + p_1 \log x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x).$$

Faisons tourner la variable x autour de l'origine, nous aurons

$$e^{2\pi\rho\sqrt{-1}} x^\rho \Psi(x) = e^{2\pi R\sqrt{-1}} x^R \left[p_0 + p_1(\log x + 2\pi\sqrt{-1}) + \ldots + p_\lambda(\log x + 2\pi\sqrt{-1})^\lambda\right],$$

ou, en faisant $e^{2\pi R\sqrt{-1}} = C_1$,

$$(121) \qquad Cx^\rho \Psi(x) = C_1 x^R [p_0 + p_1 \log x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x + q_0 + q_1 \log x + \ldots + q_{\lambda-1} \log^{\lambda-1} x],$$

en appelant $q_0, q_1, \ldots, q_{\lambda-1}$ des fonctions holomorphes.

Des équations (120) et (121), on tire

$$C(p_0 + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x) = C_1(p_0 + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x + q_0 + \ldots + q_{\lambda-1} \log^{\lambda-1} x).$$

C'est une équation algébrique en $\log x$, ce qui ne peut exister, car une telle

équation aurait une infinité de racines distinctes. Il faut donc que ses coefficients soient identiquement nuls, ce qui donnera d'abord

$$C p_\lambda = C_1 p_\lambda.$$

Puisque p_λ n'est pas nul, il faut que l'on ait $C = C_1$, et, par suite, ρ et R ne diffèrent que par un nombre entier.

La relation

$$q_0 + q_1 \log x + \ldots + q_{\lambda-1} \log^{\lambda-1} x = 0$$

entraînera ensuite

$$q_{\lambda-1} = 0, \quad q_{\lambda-2} = 0, \quad \ldots, \quad q_1 = 0, \quad q_0 = 0.$$

Il est facile de voir que les p et les q sont reliés par des relations telles que l'on aura aussi

$$p_\lambda = 0, \quad p_{\lambda-1} = 0, \quad \ldots, \quad p_1 = 0.$$

Donc l'expression $x^\rho \Psi(x)$ qui se réduit à $x^R p_0$ *ne contient pas de logarithmes*.

Le déterminant D est lié aux coefficients des équations (115) par la relation de Liouville

$$D = C e^{\int (a_{11} + \ldots + a_{nn}) dx}.$$

Il faut alors que cette expression soit aussi régulière. Pour trouver les conditions de régularité, posons

$$a_{11} + \ldots + a_{nn} = \frac{A_\alpha}{x^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} + \ldots,$$

α étant plus grand que l'unité, et nous aurons

$$\int (a_{11} + \ldots + a_{nn}) dx = \frac{A_\alpha}{(1-\alpha) x^{\alpha-1}} + \ldots + K \log x + \ldots + L_p x^p + \ldots.$$

D'où nous tirerons

$$D = C e^{\frac{A_\alpha}{(1-\alpha) x^{\alpha-1}}} \times x^k \times \theta(x),$$

où $\theta(x)$ est une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine.

Il est évidemment nécessaire et suffisant que α ne dépasse pas l'unité pour que l'expression de D soit régulière. Donc, *si* D *est le déterminant d'un système fondamental de solutions d'équations régulières de la forme* (115), *l'expression* $a_{11} + \ldots + a_{nn}$, *multipliée par* x, *est holomorphe*.

90. On peut remplacer le système

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_j \frac{a_{ij}}{x^{\alpha_{ij}}} y$$

par un système de même forme en posant, pour *une* valeur de i,

$$y_i = x^k z, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy_i}{dx} = x^k\left(\frac{dz}{dx} + \frac{k}{x} z\right). \tag{122}$$

On obtiendra les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_j}{dx} &= \frac{a_{j1}}{x^{\alpha_{j1}}} y_1 + \ldots + \frac{a_{ji}}{x^{\alpha_{ji}-k}} z + \ldots + \frac{a_{jn}}{x^{\alpha_{jn}}} y_n, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{a_{i1}}{x^{\alpha_{i1}+k}} y_1 + \ldots + \left(\frac{a_{ii}}{x^{\alpha_{ii}}} - \frac{k}{x}\right) z + \ldots + \frac{a_{in}}{x^{\alpha_{in}+k}} y_n \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots,$$

c'est-à-dire que, si l'on considère le Tableau des exposants

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1i} & \ldots & \alpha_{1n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \alpha_{i1} & \ldots & \alpha_{ii} & \ldots & \alpha_{in}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{ni} & \ldots & \alpha_{nn}, \end{matrix}$$

on peut, par une substitution de la forme (122), *modifier la colonne d'i*
dice i et la ligne d'indice i, de sorte que, si tous les nombres de la colon
augmentent ou diminuent du nombre k, tous les nombres de la ligne d
minuent ou augmentent du même nombre k. Seul le nombre α_{ii} *est invariab*
s'il est positif. Dans le cas contraire, il faut tenir compte du terme introdu
$-\frac{k}{x}$ *dans le coefficient de* z.

91. Ecrivons les équations (119) sous la forme

$$x^{1+\alpha_i}\frac{dy_i}{dx} = \sum_j a_{ij} y_j. \tag{123}$$

Si les coefficients a_{ij} sont holomorphes dans le domaine de l'origine, et si tous les nombres entiers α_i sont nuls ou négatifs, le système est régulier.

Nous n'aurons donc de difficultés à rencontrer que dans la recherche des systèmes réguliers où l'un au moins des nombres α_i est positif, en même temps que toutes les valeurs initiales correspondantes a_{ij}^0 ($j = 1, 2, \ldots, n$) ne sont pas nulles à la fois. Nous nous placerons dans cette hypothèse.

et nous identifierons, sachant qu'il doit exister au moins une solution de cette forme.

Nous aurons d'abord les équations

$$a_{i1}^0 \varphi_1^0 + \ldots + a_{in}^0 \varphi_n^0 = 0,$$

qui devront être compatibles, et nous pourrons supposer au moins l'un des φ, soit φ_1^0, différent de zéro. Alors, si cela est nécessaire, nous remplacerons, dans les équations différentielles (123), l'inconnue y_i par $y_i + \lambda_i y_1$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, de sorte que la valeur initiale $\varphi_i^0 + \lambda_i \varphi_1^0$ ne soit nulle pour aucune valeur de i, et nous aurons

$$x^{1+\alpha_1} \frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12}(y_2 + \lambda_2 y_1) + \ldots + a_{1n}(y_n + \lambda_n y_1),$$

$$x^{1+\alpha_i}\left(\frac{dy_i}{dx} + \lambda_i \frac{dy_1}{dx}\right) = a_{i1} y_1 + a_{i2}(y_2 + \lambda_2 y_1) + \ldots + a_{in}(y_n + \lambda_n y_1).$$

Il est évident que le nouveau système différentiel pourra prendre la même forme générale que le système (123), et sera régulier comme lui. Mais, de plus, si l'on fait maintenant la substitution

$$y_i = x^r \varphi_i(x),$$

on devra avoir $\varphi_i^0 \neq 0$ pour toutes les valeurs de i.

92. Nous supposerons que le système (123) est préparé de manière à satisfaire à cette hypothèse.

Parmi les équations (123) distinguons celles qui correspondent à la plus grande valeur α des nombres entiers α_i, et plaçons-les les premières. Le système (123) pourra s'écrire

$$(124) \qquad x^{1+\alpha} \frac{dy_i}{dx} = \sum_j b_{ij} y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et, pour les valeurs 1, 2, ..., h de l'indice i toutes les quantités b_{ij}^0 ne seront pas nulles pour toutes les valeurs de j, tandis que l'on aura $b_{ij}^0 = 0$ pour $i = h + 1$, $h + 2$, ..., n.

Dans ces conditions, on peut démontrer que le déterminant

$$(125) \qquad \begin{vmatrix} b_{11}^0 & \ldots & b_{1h}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{h1}^0 & \ldots & b_{hh}^0 \end{vmatrix}$$

est nul. En effet, dans le système (124), considérons la solution

$$u_i = x^\rho \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f_i(u) = x^\rho \varphi_i(x) = x^\rho(\varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + x^2 \varphi_i^2 + \ldots)$$

[illegible] nous pouvons supposer $z_i^1 \neq 0$, et posons

$$y_i = z_i q_i.$$

Nous aurons

$$x^{r_i} z_i \frac{dq_i}{dx} = \ldots - \left(b_{ii} - x^{r_i}\frac{dz_i}{dx}\right) q_i - \ldots - b_{in} z_n q_n$$

[illegible]

$$\frac{1}{z_i}\frac{dz_i}{dx} = \ldots$$

Nous aurons donc

$$x^{r_i}\frac{dq_i}{dx} = b_{i1}\frac{z_1}{z_i}q_1 + \ldots + \left[b_{ii} - \ldots - \frac{1}{z_i}\frac{dz_i}{dx}\,x^{r_i}\right] q_i + \ldots + b_{in}\frac{z_n}{z_i}q_n.$$

Comme ces équations admettent la solution $q_i = 1$, nous aurons identiquement

(4) $$b_{i1}\frac{z_1}{z_i} + \ldots + b_{in}\frac{z_n}{z_i} = 0.$$

Cela posé, remplaçons q_i par $x^{\rho}(q_i^1 + x q_i^2 + \ldots)$. Nous aurons

(5) $$x^{r_i}\left[\frac{\rho}{x}(q_i^1 + x q_i^2 + \ldots) + q_i^2 + 2x q_i^3 + \ldots\right]$$
$$= (b_{i1}^1 + x b_{i1}^2 + \ldots)\frac{z_1^1 + \ldots}{z_i^1 + \ldots}(q_1^1 + x q_1^2 + \ldots) + \ldots$$

En identifiant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, nous aurons d'abord la condition de possibilité

(6) $$\begin{vmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1\frac{z_2^1}{z_1^1} & \ldots & b_{1n}^1\frac{z_n^1}{z_1^1} \\ b_{21}^1\frac{z_1^1}{z_2^1} & b_{22}^1 & \ldots & b_{2n}^1\frac{z_n^1}{z_2^1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}^1\frac{z_1^1}{z_n^1} & b_{n2}^1\frac{z_2^1}{z_n^1} & \ldots & b_{nn}^1 \end{vmatrix} = 0.$$

Au moyen du premier membre de cette condition formons l'équation en s

(7) $$\begin{vmatrix} b_{11}^1 - s & \ldots & b_{1n}^1\frac{z_n^1}{z_1^1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}^1\frac{z_1^1}{z_n^1} & \ldots & b_{nn}^1 - s \end{vmatrix} = 0.$$

Elle pourra se ramener à l'équation

$$\text{(130)}\qquad \begin{vmatrix} b_{11}^0 - s & b_{12}^0 & \cdots & b_{1n}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 - s & \cdots & b_{2n}^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}^0 & b_{n2}^0 & \cdots & b_{nn}^0 - s \end{vmatrix} = 0.$$

Mais, à cause des conditions (126), on peut écrire

$$x^{1+\alpha}\frac{dq_i}{dx} = b_{i2}\frac{\varphi_2}{\varphi_i}(q_2 - q_1) + \ldots + b_{in}\frac{\varphi_n}{\varphi_i}(q_n - q_1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que, si l'on pose

$$z_h = q_h - q_1 \qquad (h = 2, 3, \ldots, n),$$

on pourra former un nouveau système différentiel régulier de la forme

$$x^{1+\alpha}\frac{dz_h}{dx} = \left(b_{h2}\frac{\varphi_2}{\varphi_h} - b_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) z_2 + \ldots,$$

et, en posant

$$z_h = z_h^0 + x z_h^1 + \ldots,$$

on pourra encore identifier à zéro les coefficients des diverses puissances de x, et l'on aura la condition

$$\begin{vmatrix} b_{h2}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_h^0} - b_{12}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = 0,$$

qui fournira l'équation en s

$$\text{(131)}\qquad \begin{vmatrix} b_{22}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_2^0} - b_{12}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} - s & \cdots & b_{2n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_2^0} - b_{1n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n2}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_n^0} - b_{12}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \cdots & b_{nn}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_n^0} - b_{1n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Introduisons la racine zéro supplémentaire, et écrivons cette équation sous la forme

$$\text{(132)}\qquad \begin{vmatrix} -s & b_{12}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \cdots & b_{1n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ 0 & b_{22}^0 - b_{12}^0\frac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} - s & \cdots & b_{2n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_2^0} - b_{1n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & b_{nn}^0 - b_{1n}^0\frac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} - s \end{vmatrix} = 0.$$

En ajoutant la première ligne à chacune des suivantes, nous aurons

$$(133)\qquad \begin{vmatrix} -s & b^1_{12}\frac{z^1_2}{z^1_1} & \dots & b^1_{1n}\frac{z^1_n}{z^1_1} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ -s & b^1_{n2}\frac{z^1_2}{z^1_1} & \dots & b^1_{nn}-s \end{vmatrix} = 0.$$

Mais à cause des conditions (126) on a, par exemple,

$$-\left[b^1_{i2}\frac{z^1_2}{z^1_1}+\dots+(b^1_{ii}-s)+\dots+b^1_{in}\frac{z^1_n}{z^1_1}\right] = b^0_{i1}\frac{z^0_1}{z^1_1}+s.$$

Donc, si l'on retranche, dans le déterminant (133), la somme des éléments des dernières colonnes des éléments correspondants de la première, on aura l'équation (129) et, par suite, l'équation (130). Appelons $\Delta(s)$ et $\Delta_1(s)$ les premiers membres des équations (130) et (133), nous aurons, au signe près, la relation

$$(134)\qquad \Delta(s) = s\Delta_1(s).$$

Voici les conséquences de la relation (134).

Considérons d'abord une équation régulière à une inconnue

$$x^{1-\alpha}\frac{dy}{dx} = ay \qquad (\alpha > 0);$$

nous aurons

$$\Delta(s) = -s.$$

Donc $\Delta(s) = 0$ admet la racine zéro.

Passons à un système régulier de deux équations différentielles. Nous aurons, à cause du cas précédent,

$$\Delta_1(s) = 0$$

et, à cause de la relation (134), l'équation

$$\Delta(s) = 0$$

devra admettre deux fois la racine zéro.

De proche en proche, on démontrera que l'équation $\Delta(s) = 0$ a n racines nulles, si le système (124) est régulier. Mais on a ici, en tenant compte des b^0_{ij} qui sont nuls,

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} b^0_{11}-s & \dots & b^0_{1h} & b^0_{1,h+1} & \dots & b^0_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ b^0_{h1} & \dots & b^0_{hh}-s & b^0_{h,h+1} & \dots & b^0_{hn} \\ 0 & \dots & 0 & -s & \dots & 0 \\ . & \dots & . & .. & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -s \end{vmatrix} = 0.$$

On en conclut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} b^0_{11} & \dots & b^0_{1h} \\ \dots & \dots & \dots \\ b^0_{h1} & \dots & b^0_{hh} \end{vmatrix}$$

est nul.

93. Cette condition subsiste après qu'on a fait une substitution de la forme

$$y_1 = z + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n$$

dans les équations (124).

En effet, on a

$$x^{1+\alpha}\frac{dz}{dx} = (b_{11} - m_2 b_{21} - \ldots - m_n b_{n1}) z + \sum_i [b_{1i} - \ldots - m_n b_{ni} + m_i (b_{11} - \ldots - m_n b_{n1})] y_i,$$

$$x^{1+\alpha}\frac{dy_i}{dx} = b_{i1} z + (b_{i2} + m_2 b_{i1}) y_2 + \ldots + (b_{in} + m_n b_{i1}) y_n.$$

Le déterminant qu'il faut étudier se réduit, à cause des conditions

$$b^0_{ij} = 0 \qquad (i = h+1, \ldots, n),$$

à

$$\begin{vmatrix} b^0_{11} - \ldots - m_h b^0_{h1} & b^0_{12} - \ldots - m_h b^0_{h2} + m_2 (b^0_{11} - \ldots - m_h b^0_{h1}) & \dots \\ b^0_{21} & b^0_{22} + m_2 b^0_{21} & \dots \\ \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant se ramène immédiatement au déterminant

$$\begin{vmatrix} b^0_{11} & \dots & b^0_{1h} \\ \dots & \dots & \dots \\ b^0_{h1} & \dots & b^0_{hh} \end{vmatrix}$$

et, par conséquent, ces deux déterminants sont nuls ensemble.

On verrait de même qu'une substitution quelconque

$$y_i = z_i + m_1 y_1 + \ldots + m_{i-1} y_{i-1} + m_{i+1} y_{i+1} + \ldots + m_n y_n,$$

pour une valeur donnée de i, même pour $i = h+1, \ldots, n$, ne change rien à la conclusion précédente.

En conséquence, il n'est pas nécessaire que l'on ait $\varphi^0_i \neq 0$ pour que le déterminant $| b^0_{11} \ldots b^0_{hh} |$ soit nul; car, pour arriver au cas où φ^0_i n'est nul pour aucune valeur de i, on n'a fait que des substitutions de la forme de celles que l'on vient d'étudier.

94. Revenons maintenant au système différentiel (123) mis sous la forme

(135) $$x^{1+\alpha}\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

et supposé régulier. Admettons d'abord que, pour aucune valeur de i, on n'ait tous les a_{ij}^0 nuls quel que soit j, et posons

(136) $$y_i = x^r\varphi_i = x^r(\varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + x^2\varphi_i^2 + \ldots).$$

Nous aurons les équations

(137) $$a_{i1}^0\varphi_1^0 + \ldots + a_{in}^0\varphi_n^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

et, puisque le système (123) admet au moins une solution de la forme (136), le déterminant

(138) $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & \ldots & a_{1n}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^0 & \ldots & a_{nn}^0 \end{vmatrix}$$

doit être nul.

Posons alors

(139) $$z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n,$$

et déterminons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ par les conditions

(140) $$a_{1j}^0\lambda_1 + \ldots + a_{nj}^0\lambda_n = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

nous aurons

$$\begin{aligned} x^{1+\alpha}\frac{dz}{dx} &= x^{1+\alpha}\left(\lambda_1\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \lambda_n\frac{dy_n}{dx}\right) \\ &= \lambda_1(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n) + \ldots + \lambda_n(a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n) \\ &= (\lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_n a_{n1})y_1 + \ldots + (\lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_n a_{nn})y_n. \end{aligned}$$

A cause des conditions (140), cette équation pourra s'écrire

$$x^\alpha\frac{dz}{dx} = a_1' y_1 + \ldots + a_n' y_n,$$

où $a_1', \ldots, a_n'$ seront des fonctions holomorphes comme les fonctions a_{ij}.

Les équations (140) étant compatibles donnent au moins une valeur, λ_n par exemple, qui n'est pas nulle, et, de l'équation (139), on tire

$$y_n = \frac{1}{\lambda_n}z - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}y_1 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}y_{n-1}.$$

de sorte qu'on peut éliminer y_n et remplacer le système (135) par le système

$$\begin{aligned}
x^{1+\alpha}\frac{dy_1}{dx} &= b_{11}y_1 + \ldots + b_{1,n-1}y_{n-1} + b_{1n}z,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x^{1+\alpha}\frac{dy_{n-1}}{dx} &= b_{n-1,1}y_1 + \ldots + b_{n-1,n-1}y_{n-1} + b_{n-1,n}z,\\
x^{\alpha}\frac{dz}{dx} &= b_{n1}y_1 + \ldots + b_{n-1,n}y_{n-1} + b_{nn}z,
\end{aligned}$$

et, dans ce système, le déterminant

$$(141)\qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b^0_{11} & \ldots & b^0_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b^0_{n-1,1} & \ldots & b^0_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

devra être nul en vertu du théorème du n° **92**.

Posons maintenant

$$y_i = z_i + \mu_i z \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
x^{1+\alpha}\frac{dz_i}{dx} &= x^{1+\alpha}\frac{dy_i}{dx} - \mu_i x^{1+\alpha}\frac{dz}{dx}\\
&= (b_{i1}y_1 + \ldots + b_{in}z) - \mu_i x(b_{n1}y_1 + \ldots + b_{nn}z)\\
&= b_{i1}(z_1 + \mu_1 z) + \ldots + b_{i,n-1}(z_{n-1} + \mu_{n-1}z) + b_{in}z\\
&\quad - \mu_i x[b_{n1}(z_1 + \mu_1 z) + \ldots + b_{n,n-1}(z_{n-1} + \mu_{n-1}z) + b_{nn}z].
\end{aligned}$$

Le coefficient de z sera

$$\mu_1 b_{i1} + \ldots + \mu_{n-1}b_{i,n-1} + b_{in} - \mu_i x(\mu_1 b_{n1} + \ldots + \mu_{n-1}b_{n,n-1} + b_{nn});$$

et, si l'on veut qu'il soit nul pour $x = 0$, il faudra poser

$$(142)\qquad \mu_1 b^0_{i1} + \ldots + \mu_{n-1}b^0_{i,n-1} + b^0_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Mais le déterminant de ces équations étant nul, elles pourront n'être pas compatibles.

Supposons ces équations non compatibles, et remarquons que l'on doit avoir

$$\begin{aligned}
b^0_{11}\varphi^0_1 + \ldots + b^0_{1n}\varphi^0_n &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,\\
b^0_{n-1,1}\varphi^0_1 + \ldots + b^0_{n-1,n}\varphi^0_n &= 0.
\end{aligned}$$

Il faudra en conclure que l'on a $\varphi^0_n = 0$, et, dans cette hypothèse, on pourra

poser

$$z = xz'.$$

Les équations (142) se réduiront aux équations

$$\mu_1 b_{i1}^0 + \ldots + \mu_{n-1} b_{i,n-1}^0 = 0.$$

Mais l'équation en z deviendra

$$x^{1+\alpha}\frac{dz}{dx} = b_{n1}z_1 + \ldots + b_{n,n-1}z_{n-1} + b'_{nn}z,$$

et l'on devra avoir aussi

$$\mu_1 b_{n1}^0 + \ldots + \mu_{n-1} b_{n,n-1}^0 = 0,$$

et il y aura compatibilité, car on doit pouvoir poser

$$b_{i1}^0 \varphi_1^0 + \ldots + b_{i,n-1}^0 \varphi_{n-1}^0 + b_{in}^0 \varphi_n^0 = 0,$$

et de plus, on a identiquement

$$b_{in}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Alors, si c'est nécessaire, on devra pouvoir calculer des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}$ tels que l'on ait

$$\nu_1 b_{11}^0 + \ldots + \nu_{n-1} b_{n-1,1}^0 + b_{n1}^0 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\nu_1 b_{1,n-1}^0 + \ldots + \nu_{n-1} b_{n-1,n-1}^0 + b_{n,n-1}^0 = 0,$$

et alors l'expression

$$x^{1+\alpha}(\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-1} z_{n-1} + z')$$

sera égale à

$$(\nu_1 b_{11} + \ldots + \nu_{n-1} b_{n-1,1} + b_{n1}) z_1 + \ldots + (\nu_1 b_{1n} + \ldots + b_{nn}) z'$$

et sera divisible par x. Nous prendrons alors

$$\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-1} z_{n-1} + z'$$

pour inconnue à la place de z'. Soit, par exemple,

$$u = \nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-1} z_{n-1} + z'.$$

Les équations différentielles prendront la forme générale

$$\left.\begin{aligned} x^{1+\alpha}\frac{dy_i}{dx} &= a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}u, \\ x^{\alpha}\frac{du}{dx} &= a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}u. \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

et l'on aura maintenant

$$a^0_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

De plus, le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a^0_{11} & \ldots & a^0_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a^0_{n-1,1} & \ldots & a^0_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

sera nul.

Partons maintenant des dernières équations différentielles obtenues, et employons de nouveau, avec des significations analogues, mais non identiques, les notations qui nous ont déjà servi.

Posons

$$(143) \qquad z = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_{n-1} y_{n-1},$$

et déterminons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ par les conditions

$$(144) \qquad a^0_{1j}\lambda_1 + \ldots + a^0_{n-1,j}\lambda_{n-1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1);$$

nous aurons, comme précédemment,

$$x^\alpha \frac{dz}{dx} = a'_1 y_1 + \ldots + a'_{n-1} y_{n-1} + a'_n u.$$

Les équations (144) étant compatibles donnent au moins une valeur, λ_{n-1} par exemple, qui n'est pas nulle, et l'on peut poser

$$y_{n-1} = \frac{1}{\lambda_{n-1}} z - \frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}} y_1 - \ldots - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} y_{n-1},$$

de sorte qu'on peut éliminer y_{n-1} et former le nouveau système différentiel

$$(145) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^{1+\alpha} \dfrac{dy_1}{dx} = b_n y_1 + \ldots + b_{1,n-2} y_{n-2} + b_{1,n-1} z + b_{1n} u, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{1+\alpha} \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = b_{n-2,1} y_1 + \ldots + b_{n-2,n-2} y_{n-2} + b_{n-2,n-1} z + b_{n-2,n} u, \\ x^\alpha \dfrac{dz}{dx} = b_{n-1,1} y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_{n-1,n-1} z + b_{n-1,n} u, \\ x^\alpha \dfrac{du}{dx} = b_{n1} y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_{n,n-1} z + b_{nn} u. \end{array} \right.$$

et, dans ce système, le déterminant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b^0_{11} & \ldots & b^0_{1,n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ b^0_{n-2,1} & \ldots & b^0_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

devra être nul.

Posons maintenant

$$y_i = z_i + \mu_i z \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2);$$

nous aurons

$$x^{1+\alpha}\frac{dz_i}{dx} = A_{i1}z_1 + \ldots + A_{i,n-2}z_{n-2} + A_{i,n-1}z + A_{in}u.$$

Le coefficient de z sera, pour $x = 0$,

$$\mu_1 b_{i1}^0 + \ldots + \mu_{n-2}b_{i,n-2}^0 + b_{i,n-1}^0,$$

et, si l'on veut qu'il soit nul, il faudra poser

$$(146) \qquad \mu_1 b_{i1}^0 + \ldots + b_{i,n-1}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Ces équations peuvent ne pas être compatibles. Mais, comme on doit avoir

$$b_{i1}^0 \varphi_1^0 + \ldots + b_{i,n-1}^0 \varphi_{n-1}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2),$$

on devra poser $\varphi_{n-1}^0 = 0$, ce qui conduira à remplacer z par xz'. Les équations (146) se réduiront aux équations compatibles

$$\mu_1 b_{i1}^0 + \ldots + \mu_{n-2}b_{i,n-2}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Alors, si c'est nécessaire, on devra pouvoir calculer des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-2}$ tels que l'on ait

$$\nu_1 b_{1j}^0 + \ldots + \nu_{n-2}b_{n-2,j}^0 + b_{n-1,j}^0 = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-2),$$

et alors l'expression

$$x^{1+\alpha}(\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-2}z_{n-2} + z')$$

sera égale à

$$(\nu_1 b_{11} + \ldots + b_{n1})z_1 + \ldots + (\nu_1 b_{1,n-1} + \ldots + b_{n,n-1})z'$$

et sera divisible par x. On prendra alors

$$\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-2}z_{n-2} + z'$$

pour inconnue à la place de z', et finalement les équations différentielles prendront la forme

$$x^{1+\alpha}\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}\ \ y_1 + \ldots + a_{i,n-1}\ \ u_1 + a_{in}\ \ u_2,$$

$$x^{\alpha}\ \frac{du_1}{dx} = a_{n-1,1}y_1 + \ldots + a_{n-1,n-1}u_1 + a_{n-1,n}u_2,$$

$$x^{\alpha}\ \frac{du_2}{dx} = a_{n1}\ \ y_1 + \ldots + a_{n,n-1}\ \ u_1 + a_{nn}\ \ u_2,$$

et l'on aura maintenant

$$a_{i,n-1}^0 = 0, \qquad a_{in}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

De plus, le déterminant

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a^0_{11} & \dots & a^0_{1,n-2} \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ a^0_{n-2,1} & \dots & a^0_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

sera nul.

Il est évident que le procédé pourra s'appliquer indéfiniment, et, par suite, qu'on pourra ramener le système proposé à la forme

$$x^\alpha \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n.$$

En diminuant α d'autant d'unités qu'il sera nécessaire, ce qu'on sait maintenant réaliser pratiquement, on sera finalement ramené à un système canonique.

95. Étudions l'exemple numérique suivant

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \ldots\right) y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\ 1 + x + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \ldots\right) y_2.$$

On trouve d'abord qu'il faut remplacer y_2 par xy_2, ce qui donne

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \ldots\right) y_2,$$

$$\frac{dv_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x} + 1 + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \ldots\right) y_2.$$

La même substitution sera encore nécessaire, et l'on aura

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ldots\right) y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_2.$$

On posera maintenant

$$z = y_1 - y_2, \qquad \text{d'où} \qquad y_1 = z + y_2,$$

et l'on aura

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{3}{x} - \frac{1}{x} + \ldots\right)(z + y_2) + \left(\frac{4}{x} + \ldots\right) y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ldots\right)(z + y_2) + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_2$$

ou encore

$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{2}{x}+\ldots\right)y_2 + \left(-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+\ldots\right)z,$$
$$\frac{dz}{dx} = \left(\ldots\ldots\ldots\right)y_2 + \left(-\frac{4}{x}+\ldots\right)z.$$

Enfin, remplaçons z par zx, nous aurons

$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{2}{x}+\ldots\right)y_2 + \left(-\frac{1}{x}+1-\ldots\right)z,$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\left(\ldots\ldots\ldots\right)y_2 - \left(\frac{5}{x}+\ldots\right)z.$$

C'est un système canonique, ce qui prouve que le système proposé primitivement est régulier.

Du reste, on peut le vérifier autrement, en remarquant que le système qu'on vient d'étudier dérive du système numérique du n° 88 par le moyen des substitutions

$$y_1 = x^3 z_1, \qquad y_2 = x z_2.$$

96. Le cas le plus important des systèmes réguliers est celui qui provient de l'équation d'ordre n

$$(147) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{p_1}{x^{\varpi_1}}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n}}y,$$

supposée régulière. On peut le traiter facilement d'une manière directe.

En effet, remplaçons l'équation (147) par le système équivalent

$$(148) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{p_1}{x^{\varpi_1}}y_1 + \dfrac{p_2}{x^{\varpi_2}}y_2 + \ldots + \dfrac{p_n}{x^{\varpi_n}}y_n, \\ \dfrac{dy_j}{dx} = y_{j-1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n), \end{cases}$$

les p étant des fonctions holomorphes non nulles pour $x = 0$.

Faisons le changement de variables suivant

$$\begin{gathered} y_n = x^\rho \varphi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{n-i} = x^{\rho-i}\varphi_{n-i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_1 = x^{\rho-(n-1)}\varphi_1, \end{gathered}$$

de manière que les dernières équations (148) prennent la forme canonique. Par exemple, l'équation

$$y_{n-i-1} = \frac{dy_{n-i}}{dx}$$

donnera

$$\varphi_{n-i-1} = (\rho - i)\,\varphi_{n-i} + x\,\frac{d\varphi_{n-i}}{dx}.$$

On remarquera en passant que

$$\varphi^0_{n-i-1} = (\rho - i)\,\varphi^0_{n-i},$$

et, par suite, que

$$\varphi^0_{n-i-1} = (\rho - i)(\rho - i + 1)\ldots(\rho - 1)\rho\,\varphi^0_n,$$

et tous les φ^0_i seront différents de zéro, si ρ est quelconque.

La première équation (148) deviendra

$$x^{\rho-(n-1)}\frac{d\varphi_1}{dx} + (\rho - n + 1)x^{\rho-n}\varphi_1 = \frac{p_1}{x^{\varpi_1-\rho+n-1}}\varphi_1 + \ldots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n-\rho}}\varphi_n,$$

ou encore

$$x\frac{d\varphi_1}{dx} + (\rho - n + 1)\,\varphi_1 = \frac{p_1}{x^{\varpi_1-1}}\varphi_1 + \ldots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n-n}}\varphi_n.$$

Les équations précédentes forment donc un système qu'on peut écrire

$$x^h\frac{d\varphi_1}{dx} = \mathrm{P}_1\varphi_1 + \mathrm{P}_2\varphi_2 + \ldots + \mathrm{P}_n\varphi_n,$$

$$x\frac{d\varphi_{n-i}}{dx} = \varphi_{n-i-1} - (\rho - i)\,\varphi_{n-i},$$

et où toutes les quantités P ne seront pas nulles à la fois pour $x = 0$.

Le système sera régulier si l'on a

$$\varpi_1 \leqq 1, \quad \varpi_2 \leqq 2, \quad \ldots, \quad \varpi_n \leqq n,$$

car alors on aura $h \leqq 1$.

Je dis que ces conditions suffisantes sont nécessaires. Pour le démontrer, admettons la proposition pour une équation de la forme (147) et d'ordre $(n-1)$ et démontrons qu'elle est vraie pour une équation d'ordre n. Comme elle est vraie pour $n = 1$, elle sera ainsi démontrée en général.

Au n° **24** du Chapitre I nous avons montré que, pour ramener un système de la forme (148) à un système non seulement linéaire, mais encore de la même forme, on devait poser

$$y_n = y = u\int t\,dx;$$

u étant une intégrale donnée de l'équation différentielle (147). Dans les conditions actuelles, nous supposerons u_n régulier et de la forme $x^r\varphi_n(x)$ et, en nous reportant aux notations de ce n° **24**, nous ramènerons le système (148) au système

également régulier

$$\frac{dt_1}{dx} = P_1 t_1 + \ldots + P_{n-1} t_{n-1},$$

$$\frac{dt_k}{dx} = t_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

où l'on a

$$P_1 \;= \frac{1}{u}\left[-\frac{n}{1}\frac{du}{dx} + \frac{p_1 u}{x^{\varpi_1}}\right],$$

..........................,

$$P_{n-1} = \frac{1}{u}\left[-\frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \frac{p_1}{x^{\varpi_1}}\frac{n(n-1)\ldots 3.2}{1.2\ldots(n-2)}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{p_{n-1}u}{x^{\varpi_{n-1}}}\right].$$

Nous supposons que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ peuvent se mettre sous les formes $\frac{\Pi_1}{x}$, $\frac{\Pi_2}{x^2}$, ..., $\frac{\Pi_{n-1}}{x^{n-1}}$, où Π_1, Π_2, ..., Π_{n-1} sont des fonctions holomorphes.

On remarquera alors que l'on a

$$u = x^r \varphi(x),$$

$$\frac{du}{dx} = x^r \frac{d\varphi}{dx} + r x^{r-1}\varphi,$$

et, d'une manière générale,

$$\frac{d^k u}{dx^k} = x^r \frac{d^k \varphi}{dx^k} + \alpha_1 x^{r-1}\frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}} + \ldots + \alpha_k x^{r-k}\varphi,$$

ce que l'on peut écrire

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} \alpha_\lambda x^{r-\lambda}\frac{d^{k-\lambda}\varphi}{dx^{k-\lambda}}, \qquad \left(\frac{d^0\varphi}{dx^0} = \varphi\right),$$

et, par suite,

$$\frac{1}{u}\frac{d^k u}{dx^k} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} \alpha_\lambda x^{-\lambda}\frac{1}{\varphi}\frac{d^{k-\lambda}\varphi}{dx^{k-\lambda}}.$$

Chacun de ces produits est donc infini d'ordre infini d'ordre k au plus.

En conséquence, si des expressions de P_1, P_2, ..., P_{n-1} on tire $\frac{p_1}{x^{\varpi_1}}$, $\frac{p_2}{x^{\varpi_2}}$, ..., $\frac{p_{n-1}}{x^{\varpi_{n-1}}}$, on obtiendra des expressions infinies d'ordres finis 1, 2, ..., $n-1$ respectivement comme P_1, P_2, ..., P_{n-1} eux-mêmes. On devra donc avoir $\varpi_1 = 1$, $\varpi_2 = 2$, ..., $\varpi_{n-1} = n-1$.

Enfin, de la première équation (148) on tirera

$$\frac{p_n}{x^{\varpi_n}} = -\frac{1}{u}\left(\frac{d^n u}{dx^n} + \frac{p_1}{x}\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{x^{n-1}}\frac{du}{dx}\right),$$

et, en développant le calcul, on verra que l'on a aussi $\varpi_n = n$ (1).

On retrouve ainsi le beau théorème de M. Fuchs :

Les équations différentielles linéaires et homogènes, d'ordre n et à coefficients uniformes, dont les intégrales n'ont qu'un nombre fini de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho, \infty$, *et restent régulières dans les domaines de ces points, sont de la forme*

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{P_{\rho-1}(x)}{\Psi(x)}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{P_{2(\rho-1)}(x)}{[\Psi(x)]^2}\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{P_{n(\rho-1)}(x)}{[\Psi(x)]^n} y,$$

où

$$\Psi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_\rho),$$

et où les $P(x)$ *désignent des polynomes en* x *de degrés marqués par les indices ou de degrés moindres.*

Cette belle conclusion de l'étude des systèmes réguliers montre que le seul cas général possédant un caractère de simplicité est celui du système (148) qui provient de l'équation (147) différentielle d'ordre n.

97. Écrivons une équation régulière d'ordre n sous la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{p_1}{x}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{p_n}{x^n} y = 0.$$

Les exposants r des solutions seront déterminés par l'équation

$$D(r) = (r - n + 1)(r - n + 2)\ldots r + p_1^0(r - n + 2)\ldots r + \ldots + p_n^0 = 0,$$

qui est algébrique et de degré n en r.

Cette équation s'appelle, soit l'*équation fondamentale déterminante,* soit l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle.

Il est utile de connaître les principales propriétés de cette équation algébrique.

D'abord, pour former l'équation $D(r) = 0$, on pourra procéder de la manière suivante. On posera $y = x^r$ dans le premier membre de l'équation différentielle, ce qui donnera l'expression

$$x^{r-n}[r(r-1)\ldots(r-n+1) + p_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + p_n].$$

(1) *Voir* la Thèse de M. Floquet.

On divisera ce résultat par x^r, et l'on égalera à zéro le coefficient de la plus basse puissance de x.

Voici d'autres propriétés :

Si p_n est identiquement nul, $D(r)$ est divisible par r. Faisons cette division et changeons ensuite r en $r+1$, nous aurons l'équation caractéristique de l'équation différentielle d'ordre $n-1$, obtenue en prenant pour inconnue $\frac{dy}{dx}$. Il n'y a qu'à vérifier l'exactitude du calcul proposé, ce qu'il est facile de faire.

Si l'on pose $y = x^{r_0} z$ dans l'équation différentielle, l'équation caractéristique de l'équation en z aura pour racines celles de l'équation caractéristique primitive, diminuées de r_0. Elle se déduit donc de l'équation $D(r) = 0$ en changeant r en $r + r_0$.

Si l'on pose $y = \Psi(x) z$, $\Psi(x)$ étant une fonction holomorphe différente de zéro pour $x = 0$, l'équation caractéristique de l'équation en z est la même que celle de l'équation en y. En effet, on voit sans peine que l'équation en z étant de la forme

$$\frac{d^n z}{dx^n} + (p_1 + P_1)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + (p_2 + P_2)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + (p_n + P_n) z = 0,$$

son équation caractéristique a son premier membre décomposable en deux parties, la première provenant de l'expression

$$x^{r-n}[r(r-1)\ldots(r-n+1) + p_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + p_n],$$

et la seconde de l'expression

$$x^{r-n}[r(r-1)\ldots(r-n+1) + P_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + P_n].$$

Or, le plus haut exposant de x dans les dénominateurs de la première expression étant supérieur au plus grand exposant de x dans la seconde, si l'on multiplie par x^{g-r}, g étant le plus grand de tous les exposants, et si l'on fait ensuite $x = 0$, la seconde expression donnera un résultat nul, et l'on obtiendra, par conséquent, le même résultat qu'en opérant sur la première expression seule, c'est-à-dire sur celle qui correspond à l'équation caractéristique de l'équation en y.

Ces diverses propriétés, rapprochées des théories que l'on a vues dans les Chapitres précédents, servent de base à la théorie des équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre n dans la plupart des Mémoires[1] publiés sur cette question. Pour plus de détails, nous renverrons le lecteur à ces Travaux.



[1] Fuchs, *Journal de Crelle*, t. 66, p. 121 et Tomes suivants. — Tannery, *Thèse de Doctorat*. — Thomé et Frœbenius, *Journal de Crelle*, t. 66 et suivants.

Ajoutons enfin une remarque. Il peut se présenter une circonstance curieuse dans le cas des systèmes réguliers. Si, en un point quelconque $x = 0$, toutes les racines de l'équation caractéristique $F(r) = 0$ sont entières, positives et distinctes, elles ne formeront qu'un seul groupe. Si, en outre, les logarithmes disparaissent dans l'intégration, les solutions n'offriront au point $x = 0$ aucune singularité, et ce point ne sera pas en réalité un point singulier. Il ne diffère des autres points qu'en ce que le déterminant d'un système fondamental de solutions s'y annule. Ces points ont reçu, de M. Weierstrass, le nom de *points à apparence singulière*.

98. Le théorème de M. Fuchs fournit une seconde méthode pour décider si un système quelconque est régulier.

Posons

$$z = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n,$$

et soit donné le système

$$(149) \qquad x^\rho \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n.$$

Il est à peu près évident que ce système sera régulier, si la valeur z satisfait à une équation différentielle régulière d'ordre n, *quelles que soient les valeurs* de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Nous allons préciser cette question.

D'abord z satisfait à une équation différentielle. Car si la variable x fait le tour de l'origine, on a, avec les notations du Chapitre III,

$$Z_j = \lambda_1 Y_{1j} + \ldots + \lambda_n Y_{nj},$$

et, entre les anciennes et les nouvelles valeurs y_{ij} et Y_{ij} des éléments d'un système fondamental de solutions, existent les relations

$$Y_{ij} = C_{j1} y_{i1} + \ldots + C_{jn} y_{in},$$

de sorte qu'on a

$$Z_j = \lambda_1 (C_{j1} y_{11} + \ldots + C_{jn} y_{1n}) + \ldots + \lambda_n (C_{j1} y_{n1} + \ldots + C_{jn} y_{nn})$$

ou

$$Z_j = C_{j1}(\lambda_1 y_{11} + \ldots + \lambda_n y_{n1}) + \ldots + C_{jn}(\lambda_1 y_{1n} + \ldots + \lambda_n y_{nn}),$$

ou enfin

$$Z_j = C_{j1} z_1 + \ldots + C_{jn} z_n.$$

On reconnaît les équations caractéristiques d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n. Pour des valeurs choisies de λ, l'ordre n'est pas nécessairement n; il faut, pour cela, en plus des conditions précédentes, que les n fonctions $z_1, \ldots, z_n$ soient linéairement indépendantes.

Le contraire peut arriver. En effet, écrivons la relation

$$A_1 z_1 + \dots + A_n z_n = 0$$

à coefficients constants. On en conclura, en faisant

$$z_j = \lambda_1 y_{1j} + \dots + \lambda_n y_{nj},$$

la relation

$$A_1(\lambda_1 y_{11} + \dots + \lambda_n y_{n1}) + \dots + A_n(\lambda_1 y_{1n} + \dots + \lambda_n y_{nn}) = 0$$

ou

$$\lambda_1(A_1 y_{11} + \dots + A_n y_{1n}) + \dots + \lambda_n(A_1 y_{n1} + \dots + A_n y_{nn}) = 0.$$

Or, les parenthèses renferment les éléments d'une certaine solution du système différentiel. *Donc, si l'équation générale en z n'est pas d'ordre n*, ***il existe une solution $\eta_1, \dots, \eta_n$ des équations en y, entre les éléments de laquelle il existe une relation linéaire à coefficients constants de la forme***

$$\lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_n \eta_n = 0.$$

La réciproque est vraie. En effet, on a

$$\eta_i = A_1 y_{i1} + \dots + A_n y_{in}$$

et, par suite,

$$\lambda_1(A_1 y_{11} + \dots) + \dots + \lambda_n(A_1 y_{n1} + \dots) = 0$$

ou

$$A_1(\lambda_1 y_{11} + \dots + \lambda_n y_{n1}) + \dots + A_n(\lambda_1 y_{1n} + \dots) = 0.$$

Donc les n fonctions

$$z_i = \lambda_1 y_{1i} + \dots + \lambda_n y_{ni}$$

ne sont pas linéairement indépendantes.

Mais si les λ restent quelconques, l'ordre de l'équation en z est n. Car, pour que l'équation

$$\lambda_1(A_1 y_{11} + \dots + A_n y_{1n}) + \dots + \lambda_n(A_1 y_{n1} + \dots + A_n y_{nn}) = 0$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, il faudrait que l'on eût

$$A_1 y_{in} + \dots + A_n y_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ce qui est impossible, si le système de solution y_{ij} est fondamental.

On formera l'équation d'*ordre n en z* de la manière suivante.

Posons, en général,

$$\frac{d^k y_i}{dx^k} = \frac{1}{x^{k\rho}}(A_{i1}^k y_1 + \dots + A_{in}^k y_n),$$

et dérivons cette équation. Nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}y_i}{dx^{k+1}} = &\ \frac{1}{x^{k\rho}}\left(y_1\frac{dA_{i1}^k}{dx}+\ldots+y_n\frac{dA_{in}^k}{dx}\right)\\ &+\frac{1}{x^{k\rho}}\left(A_{i1}^k\frac{dy_1}{dx}+\ldots+A_{in}^k\frac{dy_n}{dx}\right)\\ &-\frac{k\rho}{x^{k\rho+1}}(A_{i1}^k y_1+\ldots+A_{in}^k y_n),\end{aligned}$$

et, en remplaçant $\frac{dy_i}{dx}$ par sa valeur tirée des équations proposées, nous obtiendrons

$$\frac{d^{k+1}y_i}{dx^{k+1}} = \frac{1}{x^{(k+1)\rho}}(A_{i1}^{k+1}y_1+\ldots+A_{in}^{k+1}y_n),$$

équations où l'on a

$$A_{ij}^{k+1} = x^\rho\frac{dA_{ij}^k}{dx} - k\rho x^{\rho-1}A_{ij}^k + (A_{i1}^k A_{1j}^1+\ldots+A_{in}^k A_{nj}^1),$$

et les fonctions A_{ij} seront holomorphes, à condition que ρ soit un entier positif, et que les fonctions a_{ij} de l'équation (149) qu'on peut écrire A_{ij}^1 soient holomorphes.

On aura alors successivement

$$\frac{d^k z}{dx^k} = \lambda_1\frac{d^k y_1}{dx^k}+\ldots+\lambda_n\frac{d^k y_n}{dx^k},$$

$$x^{k\rho}\frac{d^k z}{dx^k} = \lambda_1(A_{11}^k y_1+\ldots)+\lambda_n(A_{n1}^k y_1+\ldots),$$

$$x^{k\rho}\frac{d^k z}{dx^k} = (\lambda_1 A_{11}^k+\ldots)y_1+\ldots+(\lambda_1 A_{1n}^k+\ldots)y_n,$$

ce que nous écrirons simplement

$$x^{k\rho}\frac{d^k z}{dx^k} = P_{k1}y_1+\ldots+P_{kn}y_n.$$

En faisant $k=1, 2, \ldots, n$ dans cette équation, nous obtiendrons n équations du premier degré en $y_1, \ldots, y_n$. Avec l'équation qui définit z nous aurons $n+1$ équations entre lesquelles nous pourrons éliminer $y_1, \ldots, y_n$. Le résultat obtenu est de la forme

$$\begin{vmatrix} x^{n\rho}\frac{d^n z}{dx^n} & P_{n1} & \ldots & P_{nn}\\ x^{(n-1)\rho}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} & P_{n-1,1} & \ldots & P_{n-1,n}\\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ z & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n\end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant, de la forme

$$(150) \qquad \frac{d^n z}{dx^n} - \frac{1}{x^\rho}\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{x^{(n-1)\rho}}\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x^{n\rho}}\frac{\Delta}{\Delta_n} z = 0.$$

Si l'on a $\rho = 1$, tous les rapports $\frac{\Delta_i}{\Delta}$ devront être holomorphes, car l'équation en z devra être régulière comme le système proposé.

Pour une valeur quelconque de ρ, les conditions seront, comme on l'a déjà vu directement, compliquées à cause de la présence indispensable des n indéterminées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans les déterminants Δ.

Cependant, si les hypothèses

$$\lambda_j = 0, \qquad j \neq i, \qquad \lambda_i \neq 0,$$

faites pour toutes les valeurs de i successivement, conduisent à n équations différentielles d'*ordre n*, chacune de ces équations, étant débarrassée d'arbitraires, sera d'une façon rapide reconnue régulière ou non, et cet examen suffira évidemment pour formuler une conclusion sur l'équation générale en z, ou sur le système proposé lui-même.

99. Le procédé qui permet de ramener un système régulier à la forme canonique consiste à faire une suite mélangée de substitutions des formes

$$y_i | x^k y_i$$

ou

$$y_i | z_i + \sum_j m_j y_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n).$$

Réciproquement, si l'on fait, dans un système canonique général, une suite de substitutions arbitraires des formes précédentes, on formera un système régulier quelconque.

Comme conclusion de ce Chapitre, nous dirons que tout système régulier peut être ramené à un *système canonique*.

CHAPITRE VI.

DES SYSTÈMES A COEFFICIENTS PÉRIODIQUES.

---

100. Au moyen des principes exposés au Chapitre précédent, on peut reconnaître si les solutions d'un système d'équations linéaires et homogènes sont régulières en chaque point. Si, de plus, les racines de l'équation caractéristique sont entières, et si les logarithmes disparaissent, les éléments des solutions seront uniformes. Nous supposerons dans le Chapitre VI que ces hypothèses soient réalisées dans tout le plan, et nous étudierons la classe très intéressante des *équations différentielles de la forme*

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

où les coefficients a sont des fonctions uniformes admettant la période ω, *et dont les solutions sont uniformes.*

Si l'on pose $e^{\frac{2\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} = x'$, le système A prendra la forme

$$\text{(A')} \qquad \frac{dy_i}{dx'} \times \frac{2\pi x'\sqrt{-1}}{\omega} = a'_{i1}y_1 + \ldots + a'_{in}y_n.$$

Ce système linéaire pourra être étudié comme un système ordinaire, et, en rétablissant ensuite la variable indépendante x, on aura mis en évidence le rôle de la période ω.

Mais on peut employer un procédé direct de recherches, comme nous le montrerons dans ce Chapitre.

101. Soient $y_{ij}(j = 1, 2, \ldots, n)$, ou $f_{ij}(x)$ n solutions distinctes du système différentiel (A). Quand la variable x va, par un chemin quelconque, du point x au point $x + \omega$, les fonctions uniformes $f_{ij}(x)$ prennent les nouvelles valeurs $f_{ij}(x + \omega)$, tandis que les coefficients uniformes et périodiques a reprennent leurs valeurs primitives. En conséquence, les $f_{ij}(x + \omega)$, fonctions toujours distinctes, forment un second système fondamental de solutions dont on peut exprimer les éléments en fonctions linéaires, homogènes, à coefficients constants des éléments du premier système fondamental $f_{ij}(x)$. On aura donc des relations de

la forme

(151) $$f_{ij}(x+\omega) = C_{j1} f_{i1}(x) + \ldots + C_{jn} f_{in}(x),$$

où le déterminant des constantes C est différent de zéro.

102. *Les relations* (151) *sont caractéristiques dans le plan des systèmes d'équations linéaires et homogènes, à coefficients périodiques, et dont l'intégrale générale est uniforme.*

Soit, en effet, D le déterminant, supposé différent de zéro, de n^2 fonctions y_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)$ d'une variable indépendante x, uniformes dans tout le plan et n'ayant que l'infini pour point singulier.

Supposons que cette variable x décrive un chemin quelconque allant du point x au point $x+\omega$. Si les n^2 fonctions prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants telles que les relations (151), ces fonctions forment un système fondamental de solutions d'un système d'équations de la forme (A) dont les coefficients a sont périodiques et n'ont d'autre point singulier que l'infini.

Nous démontrerons cette proposition en formant un système d'équations tel que (A) auquel satisfassent les n^2 solutions y_{ij}. Nous aurons, en général, les relations

$$\frac{dy_{ij}}{dx} = a_{i1} y_{1j} + \ldots + a_{in} y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

et nous en tirerons

$$D a_{ip} = \begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & \frac{dy_{i1}}{dx} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & \frac{dy_{in}}{dx} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que nous pourrons calculer les coefficients a.

Ces coefficients sont exprimés par le rapport de deux déterminants. Le dénominateur du rapport est toujours D; le numérateur est le résultat obtenu en remplaçant dans D les éléments d'une colonne par les dérivées des fonctions y_{ij}. Les éléments des deux déterminants prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme (151) quand la variable x décrit un chemin quelconque du point x au point $x+\omega$. Les constantes sont les mêmes pour les éléments homologues des deux déterminants qui forment le rapport. Les deux termes du rapport sont donc multipliés par le même déterminant des constantes. Donc le rapport ne change pas, et, par suite, les coefficients a sont des fonctions périodiques.

Les coefficients a, n'ayant évidemment pas d'autres points singuliers que ceux des fonctions y_{ij} elles-mêmes, n'ont d'autre point singulier que l'infini.

Enfin, le déterminant D n'étant pas identiquement nul, les fonctions y_{ij} forment un système fondamental de solutions du système d'équations (A).

103. Considérons maintenant deux systèmes fondamentaux de solutions du système d'équations (A). Nous représenterons leurs valeurs par y_{ij} et η_{ij}, et leurs nouvelles valeurs par Y_{ij} et H_{ij} quand la variable x a passé du point x au point $x+\omega$. Les déterminants L et Λ des constantes qui entrent dans les relations

$$\left.\begin{aligned} Y_{ij} &= l_{j1}y_{i1}+\ldots+l_{jn}y_{in} \\ H_{ij} &= \lambda_{j1}y_{i1}+\ldots+\lambda_{jn}\eta_{in} \end{aligned}\right\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

seront différents de zéro.

Si l'on exprime les éléments η_{ij} en fonction des éléments y_{ij}, on aura les relations à coefficients constants

$$\eta_{ij} = C_{j1}y_{i1}+\ldots+C_{jn}y_{in},$$
$$H_{ij} = C_{j1}Y_{i1}+\ldots+C_{jn}Y_{in},$$

d'où, en développant les deux expressions de H_{ij},

$$H_{ij} = (C_{j1}l_{11}+\ldots+C_{jn}l_{n1})y_{i1}+\ldots+(C_{j1}l_{1n}+\ldots+C_{jn}l_{nn})y_{in},$$
$$H_{ij} = (\lambda_{j1}C_{11}+\ldots+\lambda_{jn}C_{n1})y_{i1}+\ldots+(\lambda_{j1}C_{1n}+\ldots+\lambda_{jn}C_{nn})y_{in},$$

on aura

$$C_{j1}l_{1i}+\ldots+C_{jn}l_{ni} = \lambda_{j1}C_{1i}+\ldots+\lambda_{jn}C_{ni};$$

on en conclut (n° 58) *que les diviseurs élémentaires du déterminant*

$$R(\varepsilon) = \begin{vmatrix} l_{11}-\varepsilon & \ldots & l_{n1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ l_{1n} & \ldots & l_{nn}-\varepsilon \end{vmatrix}$$

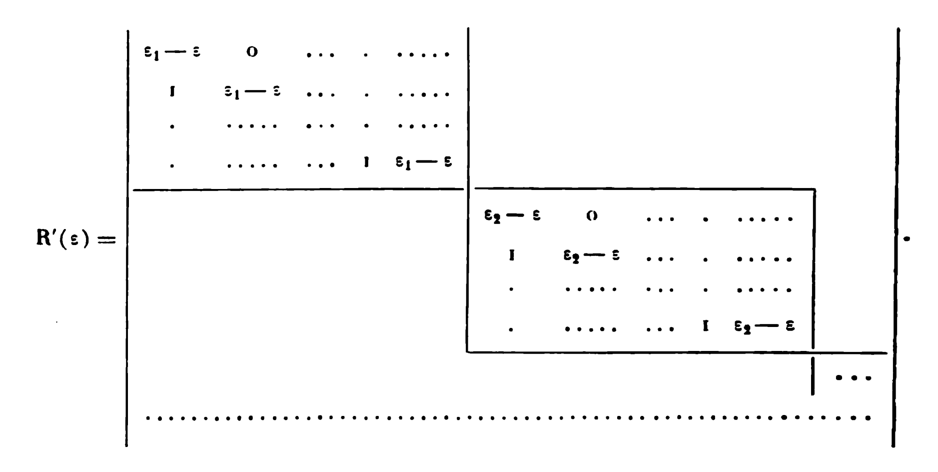
ne dépendent pas du choix du système fondamental de solutions qui sert à former ce déterminant.

104. Posons, en général

$$Y_{ij} = l_{j1}y_{i1}+\ldots+l_{jn}y_{in},$$

les coefficients l étant indépendants de l'indice i. Nous venons de voir que le déterminant $R(\varepsilon)$ conserve les mêmes diviseurs élémentaires quand on change le système fondamental de solutions. On a vu, d'autre part (Chap. II, n° 53), qu'on

peut former *a priori* un déterminant ayant les mêmes diviseurs élémentaires que le précédent. Ce déterminant $R'(\varepsilon)$ est



Il résulte de là qu'on peut faire une double substitution de la forme

$$y_{ij} = C_{j1} y'_{i1} + \ldots + C_{jn} y'_{in},$$
$$x'_{ij} = C_{1j} x_{i1} + \ldots + C_{nj} x_{in},$$

qui ramène à la fois la forme

$$x_{i1} Y_{i1} + \ldots + x_{in} Y_{in}$$

à la forme

$$x'_{i1} Y'_{i1} + \ldots + x'_{in} Y'_{in},$$

et la forme

$$x_{i1} y_{i1} + \ldots + x_{in} y_{in}$$

à la forme

$$x'_{i1} y'_{i1} + \ldots + x'_{in} y'_{in}$$

les y' et les Y' étant les anciennes et les nouvelles valeurs d'éléments qui correspondent au déterminant $R'(\varepsilon)$.

Or, si l'on considère la forme de ce déterminant par rapport aux coefficients qu'on appelait l d'une manière générale, on voit qu'on a les relations importantes

$$Y'_{i1} = \varepsilon_1 y'_{i1},$$
$$Y'_{i2} = \varepsilon_1 y'_{i2} + y'_{i1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Y'_{ij} = \varepsilon_1 y'_{ij} + y'_{i,j-1},$$
$$Y'_{i'1} = \varepsilon_2 y'_{i'1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Y'_{ij'} = \varepsilon_2 y'_{i'j'} + y'_{i,j'-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On tire de là le théorème suivant :

Soient $(\varepsilon_1 - \varepsilon)^{e_1}, \ldots, (\varepsilon_\rho - \varepsilon)^{e_\rho}$ *les diviseurs élémentaires du déterminant* $R(\varepsilon)$, *et il importe peu que les binomes* $\varepsilon_1 - \varepsilon, \ldots, \varepsilon_\rho - \varepsilon$ *soient distincts ou non, on peut trouver un système fondamental de solutions dont les éléments se groupent d'après les relations*

$$\begin{aligned} Y_{i1} &= \varepsilon_h y_{i1}, \\ Y_{i2} &= \varepsilon_h y_{i2} + y_{i1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{ie_h} &= \varepsilon_h y_{ie_h} + y_{i,e_h-1}, \end{aligned}$$

$(\varepsilon_h - \varepsilon)^{e_h}$ *étant l'un quelconque des* ρ *diviseurs élémentaires de* $R(\varepsilon)$.

105. On peut arriver aux relations précédentes en partant d'un système fondamental quelconque de solutions, et en substituant à ses éléments d'autres éléments qui leur soient liés par des relations linéaires et homogènes indépendantes et à coefficients constants convenablement choisis.

Le choix de ces coefficients est déterminé par des procédés identiques à ceux qu'on a exposés au Chapitre III (nos 68 et suivants) dans une question absolument analogue.

106. Posons

$$f(x) = \varpi_1(x) + x\,\varpi_2(x) + \ldots + x^{m-1}\,\varpi_m(x),$$

les fonctions ϖ satisfaisant aux relations

$$\Pi = \varepsilon\varpi,$$

lorsque dans ces fonctions x varie de x à $x + \omega$. On dit dans ces conditions que chaque fonction uniforme $\varpi(x)$ est *périodique de seconde espèce à la période* ω *et au multiplicateur* ε. Si $\varepsilon = 1$, on dit simplement que $\varpi(x)$ est *périodique*. On peut dire aussi que $\varpi(x)$ est périodique de première espèce.

Toute fonction uniforme satisfaisant à la relation

$$\Pi = \varepsilon\varpi, \qquad \text{ou} \qquad \varpi(x + \omega) = \varepsilon\,\varpi(x),$$

peut être représentée par l'expression

$$\varpi(x) = e^{rx} p(x),$$

où l'on a $\varepsilon = e^{r\omega}$, et où $p(x)$ est une fonction périodique de première espèce. En effet, le produit $e^{-rx}\,\varpi(x)$ est périodique de première espèce.

107. Pour chaque groupe de solutions satisfaisant aux relations

$$Y_{i1} = \varepsilon y_{i1},$$
$$Y_{i2} = \varepsilon y_{i2} + y_{i1},$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$Y_{im} = \varepsilon y_{im} + y_{i,m-1},$$

on pourra poser

$$(152)\quad \begin{cases} y_{im} = f_i(x), \\ y_{i,m-1} = \varepsilon\,\Delta\, f_i(x), \\ \dots\dots\dots\dots, \\ y_{i,m-k} = \varepsilon^k\,\Delta_k\, f_i(x), \\ \dots\dots\dots\dots, \\ y_{i1} = \varepsilon^{m-1}\,\Delta_{m-1}\, f_i(x), \end{cases}$$

absolument comme dans les nos 80 et 81 du Chapitre IV, les différences Δ étant prises par rapport à l'accroissement ω de x. Vérifions, en effet, que ces formules sont vraies. Nous aurons

$$\begin{aligned} Y_{m-k} &= \varepsilon^{k+1}\Delta_k f(x+\omega) \\ &= \varepsilon^{k+1}[\Delta_k f(x) + \Delta_{k+1} f(x)] \\ &= \varepsilon\, y_{m-k} + y_{m-k-1}. \end{aligned}$$

Mais, dans le calcul de $\Delta f(x)$, il faut bien remarquer que l'on a

$$f(x) = \varpi_1(x) + x\,\varpi_2(x) + \ldots = e^{rx}[p_1(x) + x\,p_2(x) + \ldots];$$

de sorte que l'on a

$$f(x+\omega) = e^{r\omega}e^{rx}[p_1(x+\omega) + (x+\omega)p_2(x+\omega) + \ldots]$$

ou

$$f(x+\omega) = \varepsilon[\varpi_1(x) + (x+\omega)\varpi_2(x) + \ldots],$$

et, par suite, dans le calcul des Δ successifs de $f(x)$, il faut changer x en $x+\omega$ seulement en dehors des coefficients $\varpi(x)$, ces coefficients étant considérés comme des constantes, et ensuite multiplier par ε à chaque nouvel accroissement Δ.

On peut encore dire que chaque groupe de solutions peut être représenté par des expressions de la forme

$$(153)\quad \begin{cases} y_{im} = e^{rx}\varphi^1_{im}, \\ y_{i,m-1} = e^{rx}[\varphi^1_{i,m-1} + x\varphi^2_{i,m-1}], \\ \dots\dots\dots\dots, \\ y_{i1} = e^{rx}[\varphi^1_{i1} + x\varphi^2_{i1} + \ldots + x^{m-1}\varphi^m_{i1}], \end{cases}$$

les fonctions φ des seconds membres étant *périodiques* de première espèce, et liées entre elles par des relations qu'on déduit facilement des équations (152).

108. On peut considérer les équations

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n$$

à coefficients constants comme des équations à coefficients périodiques, de période arbitraire ω. Considérons le groupe précédent de solutions. r y est arbitraire avec ω. Mais, si l'on se donne ω, r est déterminé par la relation $\varepsilon = e^{r\omega}$. On retrouve le résultat bien connu, c'est-à-dire que les racines ε de l'*équation fondamentale* sont liées aux racines r de l'*équation caractéristique* par la relation $\varepsilon = Ce^r$, C étant une constante. De plus, on trouve que les formes sont celles qui conviennent aux éléments des solutions du système (A).

109. Considérons maintenant un système d'équations

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

dont les coefficients a sont *doublement périodiques,* et dont l'intégrale générale est uniforme, avec le seul point $x = \infty$ pour point singulier.

Nous poserons, d'une manière générale,

$$P_m(x) = \varpi_0(x) + x\varpi_1(x) + \ldots + x^m \varpi_m(x),$$

les fonctions $\varpi(x)$ étant périodiques de seconde espèce, à la période ω et au même multiplicateur ε, et

$$P'_m(x) = \varpi'_0(x) + x\varpi'_1(x) + \ldots + x^m \varpi'_m(x),$$

les fonctions ϖ' étant périodiques de seconde espèce, à la période ω', et au même multiplicateur ε'.

D'après les formules (152) du n° **107**, le système (A) admet un système fondamental de solutions dont chaque groupe est de la forme

$$(154) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_{i,m} \;\; &= P_{0,i}(x), \\ y_{i,m-1} &= P_{1,i}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{i,1} \;\; &= P_{m-1,i}(x). \end{aligned} \right.$$

Ce groupe appartient à un multiplicateur ε, racine d'une équation fondamentale $R(\varepsilon) = 0$.

D'ailleurs, d'après les théories générales du Chapitre IV, toute solution appartenant au même multiplicateur est une combinaison linéaire d'éléments caractérisés par les relations (154). Observons cependant qu'il peut y avoir plus d'un groupe de relations de cette nature.

En d'autres termes, soit $R(\varepsilon) = 0$ l'équation fondamentale aux multiplicateurs; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mu$ les racines distinctes de cette équation. A l'une de ces racines ε_k d'ordre de multiplicité μ_k correspondront un ou plusieurs groupes de relations de la forme

$$\left.\begin{array}{l} y^{k'}_{i m_{k'}} = P^{k'}_{0 i}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{k'}_{i1} \;\; = P^{k'}_{m_{k'}-1}(x) \end{array}\right\} \qquad (k' = 1, 2, \ldots, \nu_k),$$

de manière que, ν_k étant le nombre de ces groupes, le nombre total des relations soit μ_k. *Toute solution appartenant au seul multiplicateur ε_k est une combinaison linéaire des μ_k solutions précédentes.*

Ce théorème résulte de considérations identiques à celles qui terminent le Chapitre IV.

Mais on peut le démontrer directement sous l'énoncé suivant :

S'il existe une relation identique de la forme

$$C_1 A_{i1} + \ldots + C_\mu A_{i\mu} = 0 \tag{155}$$

entre des solutions formant l'ensemble A_{i1} appartenant au multiplicateur ε_1, des solutions formant l'ensemble A_{i2} appartenant au multiplicateur ε_2, ..., des solutions formant l'ensemble $A_{i\mu}$ appartenant au multiplicateur ε_μ; les C étant d'ailleurs des constantes, on a séparément

$$A_{i1} = 0, \qquad A_{i2} = 0, \qquad \ldots, \qquad A_{i\mu} = 0.$$

En effet, donnons à x les valeurs successives $x + \omega, x + 2\omega, \ldots, x + \overline{\mu - 1}\,\omega$, et désignons par $F^{\eta_1}_{i1}, F^{\eta_2}_{i2}, \ldots, F^{\eta_\mu}_{i\mu}$ les coefficients des plus hautes puissances de x dans les groupements $A_{i1}, \ldots, A_{i\mu}$, nous aurons

$$C_1 A_{i1}(x + \lambda\omega) + \ldots + C_\mu A_{i\mu}(x + \lambda\omega) = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1).$$

Si l'on élimine les C entre ces μ équations et si l'on ordonne l'équation obtenue par rapport à x, on aura

$$F_{i1} + x F_{i2} + \ldots + x^{\eta} F^{\eta}_{i\mu} = 0, \tag{156}$$

où les fonctions F sont périodiques de seconde espèce au multiplicateur $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\mu$.

Cela résulte de la forme même de cette équation quand on l'écrit

$$\begin{vmatrix} A_{i1}(x) & \ldots & A_{i\mu}(x) \\ A_{i1}(x+\omega) & \ldots & A_{i\mu}(x+\omega) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ A_{i1}(x+\overline{\mu-1}\,\omega) & \ldots & A_{i\mu}(x+\overline{\mu-1}\,\omega) \end{vmatrix} = 0.$$

De plus, la relation (156), dont le premier membre est considéré comme un polynome en x, doit être identique, sans quoi l'équation algébrique de degré η en x aurait une infinité de racines. En effet, cette équation pourrait aussi s'écrire

$$(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_\mu)^\lambda[F_{i1}+(x+\lambda\omega)F_{i2}+\ldots+(x+\lambda\omega)^{\eta}F_{i\mu}^{\eta}] = 0,$$

quelle que soit la valeur de λ. Il faut donc que le coefficient $F_{i\mu}^{\eta}$ soit nul en particulier. Or, ce coefficient est

$$F_{i\mu}^{\eta}(x) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_\mu \\ \varepsilon_1^2 & \ldots & \varepsilon_\mu^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1^{\mu-1} & \ldots & \varepsilon_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix} F_{i1}^{\eta_1}F_{i2}^{\eta_2}\ldots F_{i\mu}^{\eta_\mu},$$

c'est-à-dire que $F_{i\mu}^{\eta}(x)$ est un produit de facteurs dont aucun n'est nul par hypothèse.

Donc, la relation (155) ne peut exister que si l'on a $C_1 = 0, \ldots, C_\mu = 0$, ou encore, la relation ne peut résulter que des relations séparées

$$A_{i1} = 0, \qquad \ldots, \qquad A_{i\mu} = 0.$$

110. Le théorème précédent se traduit d'une manière remarquable par un rapprochement entre deux déterminants $R(\varepsilon)$, $R(\varepsilon')$.

Considérons, en effet, les groupes des solutions qui correspondent à la période ω et au multiplicateur ε_k comme formant un groupe unique; appelons G ce groupe. Le nombre des solutions contenues dans G est μ_k, c'est-à-dire le degré de multiplicité de la racine ε_k dans l'équation $R(\varepsilon) = 0$.

Toute solution qui admet le seul multiplicateur ε_k se tire d'ailleurs de G par des combinaisons linéaires.

Cela posé, soit $\varphi_{ij}(x)$ une solution quelconque contenue dans G, $\varphi_{ij}(x+\omega')$ sera aussi une solution puisque les coefficients du système différentiel proposé (A) admettent aussi la période ω'. On devra donc avoir

$$\varphi_{ij}(x+\omega') = L_{i1}\varphi_{i1}+\ldots+L_{i\mu_k}\varphi_{i\mu_k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu_k).$$

Ces relations étant absolument les mêmes que les relations (151) du n° **101**, on en déduit immédiatement les mêmes conséquences, à savoir celles du n° **104**.

On peut diviser les relations φ_{ij} en groupes correspondant aux diviseurs élémentaires du déterminant

$$R(\varepsilon') = \begin{vmatrix} L_{11}-\varepsilon' & \dots & L_{1\mu_k} \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ L_{\mu_k 1} & \dots & L_{\mu_k\mu_k}-\varepsilon' \end{vmatrix},$$

de manière que, si $(\varepsilon'_h - \varepsilon)^{e_h}$ *est un diviseur élémentaire de* $R(\varepsilon')$, *on ait un groupe de solutions linéairement indépendantes qui satisfassent aux relations*

$$(157) \qquad Y_{i\sigma} = \varepsilon'_h y_{i\sigma} + y_{i,\sigma-1} \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, e_h).$$

Nous retiendrons de ce théorème qu'*à toute racine distincte de l'équation* $R(\varepsilon) = 0$ *correspond au moins une solution satisfaisant à l'équation* $Y_i = \varepsilon' y_i$, ε' *étant une racine de* $R(\varepsilon') = 0$, *et nécessairement aussi une racine de* $R_1(\varepsilon') = 0$, *c'est-à-dire de l'équation fondamentale relative à la période* ω'.

En conséquence, puisque à toute racine ε correspond au moins une racine ε' et *réciproquement, il faut que les deux équations* $R(\varepsilon) = 0$, $R_1(\varepsilon') = 0$ *admettent le même nombre de racines distinctes* et ces racines correspondent au nombre de groupements incompatibles entre eux qu'on peut faire avec les solutions, comme on l'a expliqué au numéro précédent.

111. Maintenant que les déterminants $R(\varepsilon)$, $R(\varepsilon')$ ne se décomposent pas en diviseurs élémentaires parallèles, le fait est possible, comme l'a prouvé M. Floquet [*Sur les équations linéaires à coefficients doublement périodiques* (*Annales de l'École Normale supérieure*, n° 29; 1884)]. Il existe cependant des rapports entre les deux décompositions en diviseurs élémentaires et la nature des solutions. Par exemple, si l'un des déterminants $R(\varepsilon)$ n'a que des diviseurs élémentaires simples, il en est de même de $R(\varepsilon')$ et le système proposé a tous les éléments de ses solutions de forme doublement *périodique de seconde espèce* (Floquet, *loc. cit.*, n° 6). Sans insister sur ces considérations, malgré l'intérêt qu'elles présentent, nous signalerons les beaux résultats donnés dans un cas particulier par M. Picard (*Journal de Crelle*, 1881).

Considérons les trois équations

$$(158) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = -Av - Bw, \\ \dfrac{dv}{dx} = \quad Au - Cw \\ \dfrac{dw}{dx} = -Bu + C \end{cases}$$

Remarquons en passant que ce système jouit de la singulière propriété de coïncider avec le système obtenu en changeant les signes de A, B, C et en permutant les coefficients symétriques par rapport à la diagonale principale du déterminant

$$\begin{vmatrix} o & -A & B \\ A & o & -C \\ -B & C & o \end{vmatrix}.$$

Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point, et d'une manière plus générale, dans le Chapitre VII.

Nous supposerons que A, B, C sont des fonctions doublement périodiques ordinaires de x aux périodes $2k$ et $2ik'$.

Admettons que les éléments du système (158) soient des fonctions uniformes dans tout le plan, comme les coefficients des équations proposées.

(α). Soient

$$(159)\qquad \begin{cases} u_1, v_1, w_1, \\ u_2, v_2, w_2, \\ u_3, v_3, w_3 \end{cases}$$

trois solutions distinctes. On aura identiquement

$$(160)\qquad u_m u_n + v_m v_n + w_m w_n = C_{mn}, \qquad (m, n = 1, 2, 3),$$

à cause des équations (158) satisfaites par deux solutions quelconques, même confondues pour $m = n$. Il y a six relations de la forme (160).

Nous imaginons que chacune des solutions correspond à un multiplicateur ε_m pour la période $2k$ et à un multiplicateur ε'_m pour la période $2ik'$, m prenant les valeurs successives 1, 2, 3.

1° Supposons que les constantes C_{11}, C_{22}, C_{33} ne soient pas nulles toutes les trois, et soit $C_{11} \gtrless 0$. Alors la fonction $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2$ admettant les multiplicateurs ε_1^2 et $\varepsilon_1'^2$ et n'étant pas nulle, on devra avoir $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1'^2 = 1$, puisque le changement de x en $x + 2k$ et en $x + 2ik'$ ne peut altérer C_{11}. Donc le système (158) admet au moins une solution *doublement périodique*.

2° Si l'on a $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 0$, les trois autres constantes ne peuvent être nulles à la fois. Car, si les six constantes étaient nulles, on tirerait des équations (160), pour une solution quelconque U, V, W,

$$U^2 + V^2 + W^2 = 0,$$

ce qui est impossible puisque, pour une valeur donnée de x, on peut imaginer arbitrairement les valeurs de U, V, W.

Soit alors $C_{12} \gtrless 0$. La fonction

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2$$

admettra les multiplicateurs $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ et $\varepsilon'_1 \varepsilon'_2$, et aura une valeur constante différente de zéro. On aura donc

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 = 1.$$

Mais le déterminant formé par le tableau (159), a pour valeur

$$C e^{\int o.x dx} = \text{une constante}.$$

D'ailleurs, il admet les multiplicateurs $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ et $\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'_3$. On a donc aussi

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'_3 = 1.$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$\varepsilon_3 = \varepsilon'_3 = 1,$$

c'est-à-dire que le système (158) admet encore au moins une solution *doublement périodique*.

(β). Nous rappelons que nous appelons *fonction périodique de seconde espèce* toute fonction qui admet les deux multiplicateurs ε et ε' dont l'un au moins diffère de l'unité, et nous avons supposé, dans le cas (α), que le système (158) admettait trois solutions de cette nature. Nous en avons conclu l'existence d'une solution doublement périodique au sens ordinaire du mot.

Nous supposerons maintenant que le système (158) n'admet que deux solutions u_1, v_1, w_1 et u_3, v_3, w_3 doublement périodiques de seconde espèce, et nous imaginerons une troisième solution u_2, v_2, w_2 distincte des premières. Nous avons vu dans la théorie générale qu'on peut choisir cette solution de sorte que l'on ait

$$u_2(x + 2k) = \varepsilon_1 u_2 + a u_1,$$
$$v_2(x + 2k) = \varepsilon_1 v_2 + a v_1,$$
$$w_2(x + 2k) = \varepsilon_1 w_2 + a w_1,$$

a étant une constante; on aura aussi et en même temps

$$u_2(x + 2ik') = \varepsilon'_1 u_2 + b u_1.$$
$$v_2(x + 2ik') = \varepsilon'_1 w_2 + b v_1,$$
$$w_2(x + 2ik') = \varepsilon'_1 w_2 + b w_1.$$

Si l'une des constantes C_{11} ou C_{33}, par exemple C_{11} n'est pas nulle, on a vu qu'il existe une solution doublement périodique.

Le seul cas à discuter est celui où l'on a $C_{11} = C_{33} = 0$. Si C_{12} n'est pas nul,

on aura $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1'^2 = 1$, car l'expression $u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2$ se transforme, par le changement de x en $x + 2k$, en $\varepsilon_1^2(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)$. On aura donc $\varepsilon_1^2 = 1$ et de même $\varepsilon_1'^2 = 1$. Donc il existe une solution doublement périodique.

Si C_{11}, C_{33}, C_{12} sont nulles à la fois, soit $C_{22} \gtrless 0$. L'expression $u_2^2 + v_2^2 + w_2^2$ devient, en changeant x en $x + 2k$, $\varepsilon_1^2(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)$, d'où l'on tire encore les mêmes conclusions que dans les cas précédents.

Si C_{11}, C_{33}, C_{22}, C_{12} sont nulles à la fois, soit $C_{13} \gtrless 0$, on aura $\varepsilon_1 \varepsilon_3 = 1$, et, si enfin $C_{13} = 0$, on aura encore la relation $\varepsilon_1 \varepsilon_3 = 1$, car on a

$$u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3 = C_{23},$$

et nécessairement $C_{23} \lesseqgtr 0$, comme on l'a vu plus haut.

Mais le tableau (159) est un déterminant constant qui donne les relations

$$\varepsilon_1^2 \varepsilon_3 = 1 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1'^2 \varepsilon_3' = 1,$$

quand on change x en $x + 2k$ ou en $x + 2ik'$. Donc, à cause de l'une des relations

$$\varepsilon_1^2 = 1, \qquad \varepsilon_3^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_3 = 1,$$

et de celles qu'on vient d'écrire, l'un des multiplicateurs ε_1 ou ε_3 sera égal à 1, l'autre ε' étant égal à ± 1. *Dans le cas de $\varepsilon' = -1$, on considérera la période $4ik'$*. Donc, il y a une solution *doublement périodique* comme dans les cas précédents.

(γ). Supposons enfin qu'il n'y ait qu'une solution $u_1 v_1 w_1$ doublement périodique de seconde espèce, deux autres solutions pouvant être choisies de manière à satisfaire aux relations

$$\begin{aligned}
u_2(x + 2k) &= \varepsilon_1 u_2 + a u_1, \\
v_2(x + 2k) &= \varepsilon_1 v_2 + a v_1, \\
w_2(x + 2k) &= \varepsilon_1 w_2 + a w_1, \\
u_3(x + 2k) &= \varepsilon_1 u_3 + b u_2 + c u_1, \\
v_3(x + 2k) &= \varepsilon_1 v_3 + b v_2 + c v_1, \\
w_3(x + 2k) &= \varepsilon_1 w_3 + b w_2 + c w_1.
\end{aligned}$$

On verra, au moyen des équations (160), que l'on a toujours $\varepsilon_1^2 = 1$. D'ailleurs le déterminant (148), qui est constant, permet de poser $\varepsilon_1^3 = 1$: on aura donc $\varepsilon_1 = 1$. De même, $\varepsilon_1' = 1$. Il y a donc encore dans le cas (γ) une solution *doublement périodique*.

112. Pour déterminer les formes analytiques des éléments des solutions satisfaisant à la fois aux conditions (154) du n° **109** et aux conditions (157) du n° **110**,

nous rappellerons d'abord quelques propositions de la théorie des fonctions elliptiques.

On démontre l'existence d'une fonction θ satisfaisant aux relations

$$\theta(x+\omega) = \theta(x),$$
$$\theta(x+\omega') = \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}(x+c)},$$

De ces relations on déduit, en prenant les dérivées logarithmiques,

$$\frac{\theta'(x+\omega)}{\theta(x+\omega)} = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)},$$
$$\frac{\theta'(x+\omega')}{\theta(x+\omega')} = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega},$$

de sorte que, si l'on pose $Z(x) = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}$, on a les relations

$$Z(x+\omega) = Z(x).$$
$$Z(x+\omega') = Z(x) + q,$$
$$\omega q = -2\pi\sqrt{-1}.$$

Au moyen de la fonction $Z(x)$ construisons les fonctions

$$u(x) = \frac{\omega\omega'}{2\pi\sqrt{-1}} Z(x) \qquad \text{et} \qquad u\ (x) = -\frac{\omega\omega'}{2\pi\sqrt{-1}}\left[Z(x) - \frac{qx}{\omega'}\right].$$

Nous aurons les relations

$$u(x+\omega) = u(x), \qquad u'(x+\omega) = u'(x) - \omega,$$
$$u(x+\omega') = u(x) - \omega', \qquad u'(x+\omega') = u'(x)$$

et

$$u + u' + x = 0.$$

Nous allons montrer qu'on peut exprimer les éléments des solutions des systèmes à coefficients périodiques et à intégrales uniformes au moyen de ces fonctions $u(x)$ et $u'(x)$.

113. Considérons l'expression

$$P_m(x) = \varpi_0(x) + \ldots + x^m \varpi_m(x),$$

de multiplicateur ε par rapport à la période ω, et admettant ω' comme seconde période avec le multiplicateur ε'; nous aurons

$$P(x+\omega') = \varepsilon' P(x),$$

c'est-à-dire

$$\varpi_0(x+\omega')+(x+\omega')\varpi_1(x+\omega')+\ldots+(x+\omega')^m\varpi_m(x+\omega')$$
$$=\varepsilon'[\varpi_1(x)+x\varpi_1(x)+\ldots+x^m\varpi_m(x)].$$

Identifions les deux membres par rapport aux diverses puissances de x, nous aurons les $m+1$ équations

$$\begin{aligned}\varpi_{m-k}(x+\omega')&+\frac{m-k+1}{1}\omega'\varpi_{m-k+1}(x+\omega')\\&+\frac{(m-k+1)(m-k+2)}{2}\omega'^2\varpi_{m-k+2}(x+\omega')+\ldots\\&+\frac{(m-k+1)(m-k+2)\ldots(m-1)m}{1.2\ldots k}\omega'^k\varpi_m(x+\omega')\\&=\varepsilon'\varpi_{m-k}(x)\qquad(k=0,1,2,\ldots,m).\end{aligned}$$

Ces équations donnent

$$(161)\quad\left\{\begin{aligned}&\varpi_m(x+\omega')=\varepsilon'\varpi_m(x),\\&\varpi_{m-1}(x+\omega')=-\frac{m}{1}\varepsilon'\omega'\varpi_m(x)+\varepsilon'\varpi_{m-1}(x),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\&\varpi_{m-k}(x+\omega')=(-1)^k\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}\varepsilon'\omega'^k\varpi_m(x)+\ldots\\&\qquad\qquad-\frac{m-k+1}{1}\varepsilon'\omega'\varpi_{m-k+1}(x)+\varepsilon'\varpi_{m-k}(x),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\&\varpi_0(x+\omega')=(-1)^m\varepsilon'\omega'^m\varpi_m(x)+\ldots+\varepsilon'\varpi_0(x).\end{aligned}\right.$$

De ces relations, nous déduisons les conséquences suivantes.

Soit posé

$$\varpi_m(x)=\varpi_{00}(x),$$

on a

$$\frac{\varpi_{m-1}(x+\omega')}{\varpi_m(x+\omega')}=\frac{\varpi_{m-1}(x)}{\varpi_m(x)}-m\omega'.$$

Par suite, la fonction

$$\frac{\varpi_{m-1}(x)}{\varpi_m(x)}-mu(x)$$

est uniforme et périodique aux deux périodes ω et ω'.

Soit $\chi_1(x)$ cette fonction doublement périodique.

Posons

$$\chi_1(x)\varpi_m(x)=\varpi_{10}(x).$$

Nous pourrons écrire

$$\varpi_{m-1}(x)=\varpi_{10}(x)+\frac{m}{1}\varpi_{00}(x)u(x).$$

Nous allons montrer que l'on peut poser, en général,

$$(162)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi_{m-k}(x) = \varpi_{k0}(x) &+ \frac{m-k+1}{1}\varpi_{k-1,0}(x)u(x) \\ &+ \frac{(m-k+2)(m-k+1)}{1.2}\varpi_{k-2,0}(x)u^2(x)+\ldots \\ &+ \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}\varpi_{00}(x)u^k(x). \end{aligned}\right.$$

Admettons que la loi soit vraie pour l'indice $k-1$, nous pourrons toujours écrire la relation (162) où $\varpi_{k0}(x)$ est une fonction à déterminer.

Cette fonction $\varpi_{k0}(x)$ sera nécessairement uniforme, périodique de seconde espèce avec la période ω et le multiplicateur ε; nous allons voir qu'elle admet encore comme les autres fonctions ϖ_{j0} la période ω' avec le multiplicateur ε'. En effet, on a

$$\begin{aligned} \varpi_{m-k}(x+\omega') = \varpi_{k0}(x+\omega') &+ \varepsilon'\frac{m-k+1}{1}\varpi_{k.1,0}(x)[u(x)-\omega'] + \ldots \\ &+ \varepsilon'\frac{m(m-1)\ldots m-k+1}{1.2\ldots k}\varpi_{00}(x)[u(x)-\omega']^k. \end{aligned}$$

D'ailleurs, l'une des relations (150) donne

$$\begin{aligned} \varpi_{m-k}(x+\omega') = (-1)^k\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}\varepsilon'\omega'^k\varpi_{00}(x)+\ldots \\ + \varepsilon'\left[\varpi_{k0}(x)+\frac{m-k+1}{1}\varpi_{k-1,0}(x)u(x)+\ldots\right]. \end{aligned}$$

En égalant ces deux valeurs de $\varpi_{m-k}(x+\omega')$, on a

$$\varpi_{k0}(x+\omega') = \varepsilon'\varpi_{k0}(x),$$

ce qui démontre la proposition qu'on avait en vue.

114. On déduit de ce qui précède que l'on a

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \varpi_0(x)+\ldots+x^m\varpi_m(x) \\ &= [\varpi_{m0}(x)+x\varpi_{m-1,0}(x)+\ldots+x^m\varpi_{00}(x) \\ &\quad + \frac{u(x)}{1}[\varpi_{m-1,0}(x)+2x\varpi_{m-2,0}(x)+\ldots+mx^{m-1}\varpi_{00}(x)] \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + \frac{[u(x)]^m}{1.2\ldots m}m(m-1)\ldots 2.1\,\varpi_{00}(x). \end{aligned}$$

Chacune de ces parenthèses est une dérivée de la première d'entre elles, lors-

qu'on y considère les fonctions ϖ_{j0} comme des constantes. On peut écrire, avec cette convention,

$$P_m(x) = \Pi(x) + \frac{u(x)}{1}\frac{\partial\Pi(x)}{\partial x} + \ldots + \frac{[u(x)]^m}{1.2\ldots m}\frac{\partial^m\Pi(x)}{\partial x^m}.$$

Remplaçons x par $x + u(x)$ en dehors des $\varpi_{j0}(x)$ dans $\Pi(x)$, nous aurons précisément l'expression $P_m(x)$ que nous venons d'écrire.

Mais $x + u(x) = -u'(x)$. On a donc

$$P_m(x) = \varpi_{m0}(x) - \varpi_{m-1,0}(x)u'(x) + \varpi_{m-2,0}(x)[u'(x)]^2 + \ldots + (-1)^m\varpi_{00}(x)u'^m(x),$$

ce que l'on peut écrire

$$P_m(x) = \pi_0(x) + \pi_1(x)u'(x) + \ldots + \pi_m(x)u'^m(x),$$

en posant

$$(-1)^j\varpi_{m-j,0}(x) = \pi_j(x),$$

et en particulier

$$\pi_m(x) = (-1)^m\varpi_{00}(x) = (-1)^m\varpi_m(x).$$

Donc, quand la forme P_m *admet le multiplicateur* ε' *pour une seconde période* ω', *on peut poser*

$$(163) \qquad P_m = \pi_0(x) + \ldots + \pi_m(x)u'^m(x),$$

les fonctions $\pi(x)$ *étant doublement périodiques de seconde espèce et aux multiplicateurs* ε, ε' *avec les périodes* ω, ω'. *Les deux formes de* P_m *sont toujours du même degré en* x *et* $u'(x)$. *Car les coefficients* $\varpi_m(x)$ *et* $\pi_m(x)$ *des termes du plus haut degré sont égaux au signe près.*

115. De même, l'expression P'_m au multiplicateur ε' avec la période ω', admettant ω comme période de seconde espèce au multiplicateur ε, peut se mettre sous la forme

$$(164) \qquad P'_m = \pi'_0(x) + \pi'_1(x)u(x) + \ldots + \pi'_{m'}(x)u^{m'}(x),$$

les fonctions π' étant périodiques doubles de seconde espèce.

116. *Si une fonction* $F(x)$ *peut se mettre sous les deux formes* $P_m(x)$ *et* $P'_0(x)$, *on peut lui donner la forme* (163). *De même, si elle admet les deux formes* $P_0(x)$ *et* $P'_{m'}(x)$, *on peut lui donner la forme* (164).

Cet énoncé est le résumé des numéros précédents.

117. Cherchons maintenant l'expression d'une fonction $F(x)$ capable des deux formes $P_m(x)$ et $P'_{m'}(x)$ où aucun des deux nombres m ou m' n'est nul.

Supposons que l'on puisse ramener la forme

$$P_m(x) = \varpi_0(x) + \ldots + x^m \varpi_m(x)$$

à la forme

$$P_{m'}(x) = \varpi'_0(x) + \ldots + x^{m'} \varpi_{m'}(x).$$

Il faudra que l'on ait identiquement

$$\varpi_0(x) + \ldots + x^m \varpi_m(x) = P'_{m'}(x),$$

et par suite, en changeant x successivement en $x + \omega$, $x + 2\omega$, ..., on aura les relations

$$(165)\quad \begin{cases} \varpi_0(x) + \ldots + x^m \varpi_m(x) = P'_{m'}(x), \\ \varepsilon\, \varpi_0(x) + \ldots + (x+\omega)^m \varepsilon\, \varpi_m(x) = P'_{m'}(x+\omega), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varepsilon^m \varpi_0(x) + \ldots + (x + m\omega)^m \varepsilon^m \varpi_m(x) = P'_{m'}(x + m\omega) \end{cases}$$

suffisantes pour déterminer $\varpi_0(x)$, ..., $\varpi_m(x)$. On aura

$$\varpi_k(x) = \frac{1}{\Delta}[\Delta_0 P'_{m'}(x) + \ldots + \Delta_m P'_{m'}(x + m\omega)],$$

et il est facile de calculer les déterminants Δ.

Dans le dénominateur commun Δ, on peut mettre en facteur

$$\varepsilon^{1+2+\ldots+m} = \varepsilon^{\frac{m(m+1)}{2}},$$

et l'autre facteur devient le produit des différences mutuelles des $m+1$ quantités x, $x+\omega$, ..., $x + m\omega$, c'est-à-dire est égal à

$$\omega^{\frac{m(m+1)}{2}} . 1^m . 2^{m-1} \ldots (m-1)^2 m^1.$$

On a donc

$$\Delta = (\varepsilon\omega)^{\frac{m(m+1)}{2}} . 1^m . 2^{m-1} \ldots (m-1)^2 m^1.$$

Quand à l'un quelconque Δ_j des autres déterminants, on l'obtient en supprimant la $(j+1)^{\text{ième}}$ ligne et $(k+1)^{\text{ième}}$ colonne. On peut donc mettre $\varepsilon^{\frac{m(m+1)}{2} - j}$ en facteur et l'on a un second facteur qui est le produit des différences mutuelles des m quantités $x + \lambda\omega$ (où $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m$) multiplié par la somme $S_{j,m-k}$ de leurs produits $m-k$ à $m-k$. On a donc, après un calcul facile,

$$\Delta_j = (-1)^{m+k} \varepsilon^{\frac{m(m+1)}{2} -} \omega^{\frac{m(m-1)}{2}} 1^{m-1} . 2^{m-2} \ldots (m-1)^1 C^j_m S_{j,m-k},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Delta_j}{\Delta} = (-1)^{m+k} \frac{C_m^j \varepsilon^{m-j} S_{j,m-k}}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m},$$

où C_m^j est le nombre des combinaisons de m objets j à j.

Par suite, on a

$$\varpi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \left\{ \begin{array}{l} C_m^0 S_{0,m-k} \varepsilon^m P'_{m'}(x) - C_m^1 S_{1,m-k} \varepsilon^{m-1} P'_{m'}(x+\omega) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} \varepsilon S_{m-1,m-k} P'_{m'}(x+\overline{m-1}\,\omega) \\ + (-1)^m C_m^m S_{m,m-k} P'_{m'}(x+m\omega) \end{array} \right\}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Si l'on pose d'une manière générale

$$f(x+m\varpi) - C_m^{m-1} \varepsilon f(x+\overline{m-1}\,\omega) + \ldots + (-1)^m \varepsilon^m f(x) = \delta_{\omega\varepsilon}^{(m)} f(x),$$

on aura, en particulier,

$$\varpi_m(x) = \frac{1}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \delta_{\omega\varepsilon}^m P'_{m'}(x).$$

On voit, par conséquent, que $\varpi_k(x)$ est une fonction linéaire homogène des quantités $P'_{m'}(x), \ldots, P'_{m'}(x+m\omega)$, dont les coefficients sont des polynomes en x *tous de degré* $m-k$. Or, ces quantités P' sont des expressions de même forme que $P'_{m'}(x)$, de même multiplicateur ε' et de même degré m'. Donc $\varpi_k(x)$ est une expression de la forme $P'_{m'}(x)$ de même multiplicateur ε' et d'un degré égal ou inférieur à $m'+m-k$.

Faisant successivement $k=m, m-1, \ldots, 1, 0$, on aura pour $\varpi_m(x)$, $\varpi_{m-1}(x), \ldots, \varpi_1(x), \varpi_0(x)$ des expressions de la forme $P'_{m'}(x)$ du même multiplicateur ε', mais de degrés respectivement égaux ou inférieurs à m', $m'+1$, $m'+m-1$, $m'+m$. Les coefficients des termes du plus haut degré sont dans ces expressions

$$(166) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{C_m^0}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \delta_{\omega\varepsilon}^{m'} \varpi'_{m'}(x), \\ \dfrac{-C_m^1}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \delta_{\omega\varepsilon}^m \omega'_{m'}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{(-1)^m C_m^m}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \delta_{\omega\varepsilon}^m \varpi'_{m'}(x), \end{array} \right.$$

et ne diffèrent mutuellement que par des facteurs constants.

Donc, si les deux formes $P_m(x)$ *et* $P'_{m'}(x)$ *représentent une même fonction, chaque* coefficient de l'une admet la forme de l'autre ainsi que son multiplica-

teur, mais avec un degré égal ou inférieur à la différence entre $m + m'$ et l'exposant de la puissance de x qui multiplie ce coefficient.

Pour $m' = 0$, on voit que $\varpi_m(x)$ est du degré zéro, c'est-à-dire, ce qu'on a déjà vu, que si $P_m(x)$ admet la période ω' au multiplicateur ε', le coefficient $\varpi_m(x)$ de la plus haute puissance de x est doublement périodique de seconde espèce comme $P_m(x)$ lui-même.

118. Soit maintenant $F(x)$ capable des deux formes $P_m(x)$, $P'_{m'}(x)$; il faut que les coefficients $\varpi_j(x)$ de $P_m(x)$ soient de la forme $P'_{m'}(x)$ avec des degrés respectivement égaux, en général, à m', $m'+1$, $m'+m$. On aura donc

$$\varpi_{m-k}(x) = \varpi'_{k0}(x) + \ldots + x^{m'+k}\varpi'_{k,m+k}(x) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

les fonctions ϖ' à deux indices étant entièrement analogues aux fonctions ϖ' à un seul indice dans $P'_{m'}(x)$. Remarquons que l'on a, d'après la formule (166),

$$\varpi'_{k,m'+k}(x) = \frac{(-1)^k C_m^k}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m}\delta_\omega^m \varpi'_{m'}(x).$$

Mais le second membre de l'équation (166) admet comme le premier membre la période ω et le multiplicateur ε. On a donc

$$\varpi_{m-k}(x) = \Pi'_{k0}(x) + \Pi'_{k1}(x)\,u(x) + \ldots + \Pi'_{k,m'+k}(x)\,u^{m'+k}(x),$$

où les fonctions Π' sont doublement périodiques de seconde espèce aux multiplicateurs ε et ε'.

Rappelons en même temps que l'on a

$$\Pi'_{k,m'+k}(x) = (-1)^{m'+k}\varpi'_{k,m'+k}(x).$$

La fonction considérée $F(x)$, qui est égale à $P_m(x)$, s'exprime de la manière suivante

$$F(x) = U_{m+m'} + x\,U_{m+m'-1} + \ldots + x^m U_{m'},$$

en désignant par $U_{m'-k}$ un polynome en $u(x)$ de degré $m'+k$, dont les coefficients sont doublement périodiques de seconde espèce aux multiplicateurs ε et ε'.

119. Si l'on dirige le calcul de manière que l'expression $P'_{m'}(x)$ soit susceptible de la forme $P_m(x)$ on obtiendra pour $F(x)$ l'expression

$$F(x) = U'_{m+m'} + x\,U'_{m+m'-1} + \ldots + x^{m'} U'_m,$$

où U'_{m+k} désigne un polynome en $u'(x)$ de degré $m+k$, dont les coefficients sont doublement périodiques de seconde espèce aux multiplicateurs ε, ε'.

Nous nous proposons de mettre $F(x)$ sous une forme finale qui renferme à la

fois les deux formes $P_m(x)$ et $P'_{m'}(x)$. Mais nous aurons besoin de quelques théorèmes préliminaires.

120. *Si le polynome en $u(x)$*

$$\psi'_0(x) + \psi'_1(x)\, u(x) + \ldots + \psi'_\rho(x)\, u^\rho(x),$$

dont les coefficients ψ' admettent la période ω' au multiplicateur ε', est nul identiquement, tous ses coefficients sont identiquement nuls.

On a, en effet,

$$\psi'_0(x+k\omega') + \psi'_1(x+k\omega')\, u(x+k\omega') + \ldots + \psi'_\rho(x+k\omega')\, u^\rho(x+k\omega') = 0,$$

ce qui s'écrit, en divisant par ε^k et quel que soit l'entier k,

$$\psi'_0(x) + \psi'(x)[u(x) - k\omega'] + \ldots + \psi'_\rho[u(x) - k\omega']^\rho = 0.$$

Le polynome en z

$$\psi'_0(x) + \psi'(x) z + \ldots + \psi'_\rho(x) z^\rho$$

a donc infinité de racines et, par suite, les coefficients ψ' sont identiquement nuls.

De même :

Si le polynome en $u'(x)$

$$\psi_0(x) + \psi_1(x)\, u'(x) + \ldots + \psi_{\rho'}(x)[u'(x)]^{\rho'},$$

dont les coefficients admettent la période ω avec le multiplicateur ε, est identiquement nul, tous ses coefficients sont identiquement nuls.

De ces deux théorèmes, on déduit que :

Si un polynome aux variables $u(x)$ et $u'(x)$, dont les coefficients admettent les périodes ω et ω' et les multiplicateurs ε et ε', est identiquement nul, tous ses coefficients sont identiquement nuls.

En effet, ordonnons-le par rapport à $u(x)$. Les coefficients de $u(x)$ sont de la forme ψ', donc ils sont séparément nuls. Mais ce sont des polynomes en $u'(x)$ dont les coefficients sont de la forme $\psi(x)$. Donc les divers coefficients de ces polynomes sont identiquement nuls.

Comme corollaire :

Si deux polynomes aux deux variables $u(x)$, $u'(x)$ dont les coefficients

admettent les périodes ω et ω' avec les multiplicateurs ε et ε' sont identiques, tous leurs coefficients sont identiques chacun à chacun.

121. Nous avons trouvé

$$F(x) = U_{m'+m} + x U_{m'+m-1} + \ldots + x^m U_m.$$

En dehors des U remplaçons x par $-[u(x)+u'(x)]$, ce qui est possible, puisque l'on a par définition

$$u + u' + x = 0.$$

Nous aurons

$$F(x) = U_{m'+m} - [u(x)+u'(x)] U_{m'+m-1} + \ldots + (-1)^m [u(x)+u'(x)]^m U_{m'}.$$

C'est un polynome aux deux variables $u(x)$ et $u'(x)$ à coefficients doublement périodiques de seconde espèce, de degré m en $u'(x)$. Je dis qu'il est de degré m' par rapport à $u(x)$.

En effet, on a aussi

$$F(x) = U'_{m+m'} - [u(x)+u'(x)] U'_{m+m'-1} + \ldots + (-1)^m [u(x)+u'(x)]^{m'} U'_m,$$

et cette expression doit être identique à la précédente. D'après les théorèmes du n° 120, il faut que $F(x)$ soit du degré m' par rapport à $u(x)$.

En résumé :

Si une fonction $F(x)$ est capable des deux formes $P_m(x)$ et $P'_{m'}(x)$, elle coïncide avec un polynome aux deux variables $u(x)$ et $u'(x)$ à coefficients doublement périodiques aux périodes ω et ω' et aux multiplicateurs ε et ε'; elle est de degré $m+m'$ en général, et est toujours de degré m en $u'(x)$ et de degré m' en $u(x)$, et ne peut s'exprimer ainsi que d'une seule manière.

122. Nous avons vu que, dans tous les cas, le système (A) du n° **109** admet m solutions distinctes susceptibles chacune des deux formes P et P'.

Il résulte de ce qui précède que les éléments de ces m solutions peuvent être mis sous la forme

$$y_{ik} = R_{ik}(u, u', x),$$

où $R(x, u, u')$ désigne une expression de la nature de $F(x)$ dans le numéro précédent.

123. Comme exemple d'intégration du système (A), nous rappellerons que M. Picard a intégré le système

$$\frac{du}{ds} = \frac{v}{R}, \qquad \frac{dv}{ds} = -\frac{u}{R} - \frac{w}{r}, \qquad \frac{dw}{ds} = \frac{v}{r},$$

où R et r désignent les deux rayons de courbure d'une courbe dont l'arc est s, et u, v, w représentent les neuf cosinus des angles que font avec les axes de coordonnées la tangente, la normale et la binormale de la courbe. M. Picard a intégré ce système de la forme du n° 111 dans le cas où l'on a

$$\frac{1}{R} = \frac{2n}{a} \operatorname{dn}\left(\frac{S}{a}\right), \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{b},$$

a et b étant deux constantes, n un entier positif et $\operatorname{dn} x$ la troisième fonction elliptique.

Nous renverrons, pour cet exemple, le lecteur au Mémoire de M. Picard, où il trouvera les détails nécessaires pour le calcul, et des explications sur l'origine de ces questions dans les profondes recherches de M. Hermite sur l'équation de Lamé

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

où $\operatorname{sn} x$ est la fonction elliptique ordinaire de module k, n un entier positif et h une constante quelconque.

CHAPITRE VII.

DES SYSTÈMES D'ORDRE QUELCONQUE ET THÉORÈMES COMPLÉMENTAIRES.

---

124. Il est facile d'établir qu'un système d'équations différentielles d'ordre quelconque peut être remplacé par un système d'équations du premier ordre.

Soit, en effet,

$$(167)\qquad F_i\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{\lambda_{i1}} z_1}{dx^{\lambda_{i1}}}, \ldots, z_n, \frac{dz_n}{dx}, \ldots, \frac{d^{\lambda_{in}} z_n}{dx^{\lambda_{in}}}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

un système de n équations différentielles, d'ordres variés par rapport à des fonctions $z_1, \ldots, z_n$ d'une même variable indépendante x. Ce système renferme autant d'équations que d'inconnues. Prenons pour inconnues auxiliaires les dérivées successives des variables $z_1, \ldots, z_n$, nous aurons le nouveau système

$$(168)\qquad \left\{\begin{array}{l} F_i\left(x, z_1, z'_1, \ldots, z_1^{(\lambda_1-1)}, \dfrac{dz_1^{(\lambda_1-1)}}{dx}, \ldots, z_n, \ldots, z_n^{(\lambda_n-1)}, \dfrac{dz_n^{(\lambda_n-1)}}{dx}\right) = 0, \\ \qquad \dfrac{dz_1}{dx} = z'_1, \qquad \ldots, \qquad \dfrac{dz_1^{(\lambda_1-2)}}{dx} = z_1^{(\lambda_1-1)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad \dfrac{dz_n}{dx} = z'_n, \qquad \ldots, \qquad \dfrac{dz_n^{(\lambda_n-2)}}{dx} = z_1^{(\lambda_n-1)}, \end{array}\right.$$

renfermant $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ équations du premier ordre, si l'on appelle λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ respectivement les plus grandes valeurs des nombres $\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{jn}$ dans les équations (167).

Il est évident que l'intégration du système (167) entraîne celle du système (168) et réciproquement.

125. On peut remplacer le système (167) par un système analogue au système (168), mais de forme plus symétrique.

En effet, on suppose implicitement dans le système (167) et, par suite, dans le système (168), que les premiers membres des équations, c'est-à-dire les fonctions F des diverses lettres x, z_1, z'_1, ..., sont indépendants entre eux. On pourra donc tirer de $n - 1$ de ces équations $n - 1$ des dérivées $\frac{dz^{(\alpha)}}{dx}$ $(\alpha = \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, et les porter dans l'une quelconque des autres; en d'autres termes, on pourra éliminer $n - 1$ dérivées dans chacune des n premières équations (168), et il faudra que le

nouveau système se présente sous la forme

$$(169)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Phi_i\left(x, z_1, z'_1, \ldots, z_1^{(\mu_1)}, \ldots, z_k, z'_k, \ldots, z_k^{(\mu_k)}, \frac{dz_k^{(\mu_k)}}{dx}, \ldots\ z_n, \ldots, z_n^{(\mu_n)}\right) = 0, \\ &\frac{dz^{(\alpha-1)}}{dx} = z^{(\alpha)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \right.$$

Chaque équation Φ renfermera une dérivée, sinon on pourrait, sans intégration, faire disparaître, par des procédés de calcul ordinaire, l'une des variables de la question. Chacun des Φ renfermera une dérivée distincte, sans quoi on pourrait égaler les valeurs des dérivées égales tirées des deux équations $\Phi = 0$ différentes, et l'on aurait une relation $\Phi = 0$ sans dérivées.

Développons le calcul. Soit

$$(170)\qquad \Phi(x, z_1, z'_1, \ldots, z_1^{(\nu_1)}, \ldots, z_n, z'_n, \ldots, z_n^{(\nu_n)}) = 0$$

une équation sans dérivées. On tirerait de là l'une des inconnues $z_k^{(r)}$ et on pourrait l'éliminer entre cette équation (170) et $n-1$ des n premières équations du système (169), de sorte qu'on ait

$$(171)\qquad \psi_i(x, z_1, z'_1, \ldots, z_1^{(\mu_1)}, \ldots, z_k, z'_k, z_k^{(r-1)}, z_k^{(r+1)}, \ldots, z_k^{(\mu_k)}, z_n, \ldots, z_n^{(\mu_n)}) = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

En outre l'équation

$$\frac{dz_k^{(r-1)}}{dx} = z_k^{(r)}$$

pourrait être remplacée par l'équation

$$\psi\left(x, z_1, z'_1, \ldots, z_k^{(r-1)}, z_k^{(r+1)}, \ldots, z_n, z'_n, \ldots, \frac{dz_k^{(r-1)}}{dx}\right) = 0,$$

c'est-à-dire par l'équation (170) quand on y a remplacé $z_k^{(r)}$ par sa valeur tirée de l'équation ci-dessus.

Mais si l'on différentie l'équation (170), on a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{dz_1} z'_1 + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial z_k^{(r-1)}} z_k^{(r)} + \frac{\partial\Phi}{\partial z_k^{(r)}} z_k^{(r+1)} + \ldots = 0.$$

On peut encore éliminer $z_k^{(r)}$ au moyen de la relation $\frac{dz_k^{(r-1)}}{dx} = z_k^{(r)}$ et l'on aura

finalement le système

$$(172)\quad \begin{cases} \psi = 0, \\ \psi_i = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \dfrac{dz_1}{dx} = z'_1, \quad \ldots, & \dfrac{dz_1^{(\mu_1-2)}}{dx} = z_1^{(\mu_1-1)}, \\ \ldots\ldots, \quad \ldots, & \ldots\ldots, \\ \dfrac{dz_k}{dx} = z'_k, \quad \ldots, \quad \dfrac{dz_k^{(r-2)}}{dx} = z_k^{(r-1)}, \quad \dfrac{dz_k^{(r+1)}}{dx} = z_k^{(r+2)}, \quad \ldots, & \dfrac{dz_k^{(\mu_k-2)}}{dx} = z_k^{(\mu_k-1)}, \\ \ldots\ldots, \quad \ldots, \quad \ldots\ldots, \quad \ldots\ldots, \quad \ldots, & \ldots\ldots, \\ \dfrac{dz_n}{dx} = z'_n, \quad \ldots, & \dfrac{dz_n^{(\mu_n-2)}}{dx} = z_n^{(\mu_n-1)}, \end{cases}$$

qui renferme $\mu_1 + \ldots + (\mu_k - 1) + \ldots + \mu_n$ équations à autant d'inconnues.

Le système (172) est équivalent au système (169) puisque toutes les conditions fonctionnelles de ce dernier système sont satisfaites dans le système (172).

En continuant ainsi, on peut être ramené à un système complètement algébrique. Nous écarterons ce cas.

Donc, en général, tout système de n équations différentielles à n inconnues peut être ramené à un système de la forme dite *de Jacobi*.

$$(173)\qquad f_\lambda\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_\lambda}{dx}\right) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

126. En résolvant les équations (163) par rapport aux dérivées qu'elles renferment, on pourra mettre le système sous la forme

$$\frac{dy_\lambda}{dx} = \varphi_\lambda(x, y_1, \ldots, y_m) \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

Le calcul est particulièrement intéressant dans le cas où le système (173) est *algébrique,* c'est-à-dire lorsque les fonctions F sont algébriques, entières et rationnelles par rapport à toutes les lettres qu'elles renferment.

Mettons les équations (173) sous la forme

$$(174)\quad \begin{cases} Y_1^{\nu_1} + f_{11}(x, y_1, \ldots, y_m) Y_1^{\nu_1-1} + \ldots + f_{1\nu_1}(x, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_m^{\nu_m} + f_{m1}(x, y_1, \ldots, y_m) Y_m^{\nu_m-1} + \ldots + f_{m\nu_m}(x, y_1, \ldots, y_m) = 0, \end{cases}$$

où l'on a

$$\frac{dy_\lambda^h}{dx^h} = Y_\lambda^h.$$

Posons

$$(175)\qquad t = a_1 Y_1 + \ldots + a_m Y_m,$$

les quantités a étant des indéterminées et formons l'équation

$$(t-t_1)\ldots(t-t_N)=0, \tag{176}$$

où $N=\nu_1\nu_2\ldots\nu_m$ représente le nombre des combinaisons des éléments des solutions des équations (174). L'équation (176) est rationnelle par rapport aux coefficients des équations (174), car son premier membre est une fonction symétrique des racines de ces équations. On peut donc calculer les coefficients de l'équation (176) et la mettre sous la forme

$$R(t)=g_0(x,y_1,\ldots,y_m)t^N+\ldots+g_N(x,y_1,\ldots,y_m)=0, \tag{177}$$

où les g sont des fonctions entières des lettres qu'ils renferment.

Prenons maintenant d'autres constantes b et posons

$$u=b_1Y_1+\ldots+b_mY_m, \tag{178}$$

ce qui donnera N fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_N$. Il est évident que, quel que soit ρ entier et positif, l'expression $t_1^\rho u_1+\ldots+t_N^\rho u_N$ sera une fonction symétrique des racines des équations (174) et s'exprimera rationnellement en $x, y_1, \ldots, y_m$. Posons alors

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 \quad +\ldots+u_N \quad =\omega_0(x,y_1,\ldots,y_m),\\ u_1t_1 \quad +\ldots+u_Nt_N \quad =\omega_1(x,y_1,\ldots,y_m),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ u_1t_1^{N-1}+\ldots+u_Nt_N^{N-1}=\omega_{N-1}(x,y_1,\ldots,y_m), \end{array}\right. \tag{179}$$

et multiplions ces équations par des facteurs indéterminés $\lambda_{N-1}, \lambda_{N-2}, \ldots, \lambda_1$ et g_0; nous aurons, après addition,

$$U_1\Omega(t_1)+\ldots+u_N\Omega(t_N)=g_0\omega_{N-1}+\lambda_1\omega_{N-2}+\ldots+\lambda_{N-1}\omega_0, \tag{180}$$

à condition que Ω soit déterminé par la relation

$$g_0t^{N-1}+\lambda_1t^{N-2}+\ldots+\lambda_{N-1}=\Omega(t).$$

Déterminons maintenant les λ, de sorte que l'on ait

$$\Omega(t_1)=0, \quad \ldots, \quad \Omega(t_{\alpha-1})=0, \quad \Omega(t_{\alpha+1})=0, \quad \ldots, \quad \Omega(t_N)=0,$$

ou, ce qui revient au même, à condition que $\Omega(t)$ qui est du degré $N-1$ en t, et dont on connaît les racines, devienne $\frac{R(t)}{t-t_\alpha}$, c'est-à-dire

$$g_0t^{N-1}+(g_1+g_0t_\alpha)t^{N-2}+\ldots+(g_{N-1}+g_{N-2}t_\alpha+\ldots+g_0t_\alpha^{N-1}).$$

Alors, en tenant compte de l'équation de définition de $\Omega(t)$, nous aurons

$$(181)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = g_1 + g_0 t_\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_{N-1} = g_{N-1} + g_{N-2} t_\alpha + \ldots + g_0 t_\alpha^{N-1}. \end{array}\right.$$

En outre, l'équation (180) deviendra

$$u_\alpha = \frac{g_0 \omega_{N-1} + \lambda_1 \omega_{N-2} + \ldots + \lambda_{N-1} \omega_0}{\Omega(t_\alpha)}.$$

Puisque, d'une part, les λ, d'après les équations (181), sont des fonctions entières de t_α avec des coefficients entiers en $x, y_1, \ldots, y_m$ et que, d'autre part, d'après l'équation $\frac{R(t)}{t - t_\alpha} = \Omega(t)$, on a

$$\Omega(t_\alpha) = R'(t_\alpha) = N g_0 t_\alpha^{N-1} + (N-1) g_1 t_\alpha^{N-2} + \ldots + g_{N-1},$$

on voit que u_α prendra la forme

$$(182)\quad u_\alpha = \frac{S_1(x, y_1, \ldots, y_m) t_\alpha^{N-1} + S_2(x, y_1, \ldots, y_m) t_\alpha^{N-2} + \ldots + S_N(x, y_1, \ldots, y_m)}{R'(t_\alpha)},$$

où les S sont rationnels et où $R'(t_\alpha)$ ne dépend pas des constantes b renfermées dans u_α. En outre, à cause de l'indétermination des constantes a, on peut supposer que $R'(t_\alpha)$ n'est pas nul.

Si l'on supposait $R'(t_\alpha) = 0$ il y aurait deux racines égales dans l'équation (177) et, par suite, une relation algébrique entre $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$, ce que l'on ne suppose pas.

Soit $Y_{1\alpha}, \ldots, Y_{m\alpha}$ la combinaison des solutions des équations (174) qui correspond à t_α et, avec des choix quelconques des constantes b, formons les m équations

$$(183)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 Y_{1\alpha} + \ldots + a_m Y_{m\alpha} = t_\alpha, \\ b_{11} Y_{1\alpha} + \ldots + b_{m1} Y_{m\alpha} = S_{11} t_\alpha^{N-1} + \ldots + S_{N1} : R'(t_\alpha), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ b_{1,m-1} Y_{1\alpha} + \ldots + b_{m,m-1} Y_{m\alpha} = S_{1,m-1} t_\alpha^{N-1} + \ldots + S_{N,m-1} : R'(t_\alpha). \end{array}\right.$$

Nous pouvons construire les formules

$$Y_{\rho\alpha} = A_{1\rho} t_\alpha^{N-1} + \ldots + A_{N\rho} : R'(t_\alpha),$$

où les A sont des fonctions rationnelles de $x, y_1, \ldots, y_m$ et $R'(\alpha)$ une fonction entière de degré $N - 1$ en t_α, avec des coefficients fonctions entières des mêmes lettres.

Donc, les branches $Y_{1\alpha}, \ldots, Y_{m\alpha}$ des fonctions algébriques $Y_1, \ldots, Y_m$ de x,

$y_1, \ldots, y_m$ sont formées de fonctions rationnelles d'une seule fonction algébrique t_α et de ces grandeurs $x, y_1, \ldots, y_m$.

Les coefficients s'expriment rationnellement au moyen de ces quantités, et à chaque combinaison de branches correspond une valeur de t, solution de l'équation (177) et réciproquement. De plus, la forme des expressions obtenues est indépendante de l'indice α de t.

127. Soit $g(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ le plus petit dénominateur commun des fonctions $A_{1\rho}, \ldots, A_{N\rho}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m$), on aura

$$A_{\alpha\rho} = \frac{g_{\alpha\rho}(x, y_1, \ldots, y_m)}{g(x, y_1, \ldots, y_m)},$$

et $g_{\alpha\rho}$ et g seront des fonctions entières. On pourra donc écrire

$$Y_{\rho\alpha} = \frac{g_{1\rho} t_\alpha^{N-1} + g_{2\rho} t_\alpha^{N-2} + \ldots + g_{N\rho}}{g\, R'(t_\alpha)},$$

et, si l'on pose $g\, R(t) = G(x, t, y_1, \ldots, y_m)$, on aura, puisque g ne dépend pas de t,

$$Y_{\rho_\alpha} = \frac{G_\rho(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\dfrac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_\alpha}},$$

où G_ρ sera une fonction de $x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m$, du degré $N - 1$ en t_α. En revenant à la notation $Y = \dfrac{dy}{dx}$, nous aurons ce théorème :

Le système différentiel

$$f_\lambda\left(x, y_1, \ldots, y_m, \frac{dy_\lambda}{dx}\right) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

du degré ν_λ *en* $\dfrac{dy_\lambda}{dx}$, *peut être remplacé par les* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m = N$ *systèmes suivants, chacun équivalent au précédent*

$$(184) \qquad \frac{dy_\lambda}{dx} = \frac{G_\lambda(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\dfrac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_\alpha}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N),$$

où $G_1, G_2, \ldots, G_m$ *sont des fonctions entières et où* t_α *représente successivement chacune des* N *solutions de l'équation du* N^ième *degré*

$$G(x, t, y_1, \ldots, y_m) = 0.$$

Les fonctions $G_1, \ldots, G_m$ *sont du degré* $N - 1$ *en* t_α. La forme (184) est dite *de Jacobi* ou *de M. Weierstrass.*

128. On peut décomposer G en facteurs irréductibles en t. Supposons que t_α annule le facteur $g(x, t, y, \ldots, y_m)$, on aura

$$G = g \times h(x, t, y_1, \ldots, y_m),$$

et h ne sera pas nul pour $t = t_\alpha$. On aura, par suite,

$$\frac{\partial G}{\partial t} = h\frac{\partial g}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial t},$$

et pour $t = t_\alpha$

$$\frac{\partial G}{\partial t_\alpha} = h\frac{\partial g}{\partial t_\alpha}.$$

On en déduira la formule

$$Y_{\rho\alpha} = \frac{G_\rho(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{h(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)} \times \frac{1}{\dfrac{\partial g}{\partial t_\alpha}}.$$

Soit n le degré en t de l'équation $g = 0$ et soient $t_\alpha, t_\beta, \ldots, t_\mu$ ses solutions, on aura

$$\frac{G_\rho(t_\alpha)}{h(t_\alpha)} = \frac{G_\rho(t_\alpha) \times h(t_\beta) \times \ldots \times h(t_\mu)}{h(t_\alpha) \times h(t_\beta) \times \ldots \times h(t_\mu)}$$

et le dénominateur sera une fonction entière symétrique des racines. Il s'exprimera rationnellement en $x, y_1, \ldots, y_m$. Le numérateur renfermera une fonction entière symétrique des racines de l'équation et $\frac{g}{t - t_\alpha}$ s'exprimera rationnellement en $x, y_1, \ldots, y_m$. Le numérateur pourra même, au moyen de l'équation $g = 0$, être abaissé au degré $n - 1$ en t_α. On aura donc la formule

$$Y_{\rho\alpha} = \frac{g_\rho(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\dfrac{\partial g}{\partial t_\alpha}}.$$

D'où, comme conclusion générale, le théorème suivant :

Décomposons le polynome $R(t)$ *en facteurs irréductibles* $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma$. *Le système différentiel proposé pourra être remplacé par les systèmes équivalents suivants, au nombre de* $N = \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$

$$(185) \qquad \frac{dy_\lambda}{dx} = \frac{g_{k\lambda}(x, t_{k\rho}, y_1, \ldots, y_m)}{\dfrac{\partial g_k}{\partial t_{k\rho}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \sigma),$$

où $g_k, g_{k1}, \ldots, g_{km}$ *sont des fonctions entières de leurs lettres et où* $t_{k\rho}$ *est successivement remplacé par chacune des racines de chacune des équations irréductibles* $g_k = 0$.

Il est important de remarquer que la réduction pratique du système (174) au système (184) est toujours possible, mais que le passage au système (185) n'est pas toujours praticable, à cause de la décomposition effective du polynome $R(t)$ en ses facteurs irréductibles. On a donc seulement démontré l'équivalence des systèmes (174) et (185). Nous ajouterons que, dans une équation irréductible telle que $g_k = 0$, on peut passer d'une solution t à toutes les autres, d'une manière continue en faisant décrire certains chemins fermés aux variables x et y. Donc les systèmes (185), qui correspondent aux diverses solutions d'une même équation $g_k = 0$, peuvent être représentés par un seul d'entre eux et, par suite :

Le système (174) peut être représenté par les σ systèmes différentiels

$$\frac{dy_\lambda}{dx} = \frac{g_{k\lambda}(x, t_\lambda, y_1, \ldots, y_m)}{\frac{\partial g_k}{\partial t_\lambda}}, \tag{186}$$

où t_λ est une quelconque des solutions des σ équations algébriques

$$g_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

La théorie que nous venons de faire est générale. Le cas particulier qui nous intéresse est celui où les équations finales (184) ou (186) ont leurs seconds membres fonctions linéaires et homogènes de $y_1, y_2, \ldots, y_m$. L'étude de ces équations a été faite, dans tous les Chapitres précédents, sous la forme (A) du Chapitre I.

129. Puisque nous avons donné la théorie de la réduction à la forme canonique des *systèmes algébriques,* il ne nous semble pas inutile d'y joindre les premiers principes de l'*irréductibilité de ces systèmes.*

Soient

$$\frac{\partial G(x, t_1, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_1} \frac{dy_\lambda}{dx} = G_\lambda(x, t_1, \ldots, y_m) \tag{184'}$$

les équations d'un système algébrique où t_1 est une racine choisie de l'équation $G = 0$.

Supposons qu'il existe une solution $\eta_1, \ldots, \eta_m$ dont ν des éléments satisfassent à une relation algébrique telle que

$$f(x, \eta_1, \ldots, \eta_\nu) = 0. \tag{187}$$

Si, dans les équations (184), et avec les conditions $G = 0$ et

$$f(x, y_1, \ldots, y_\nu) = 0, \tag{188}$$

on élimine y_ν, par exemple, on obtiendra un système différentiel à $m - 1$ équa-

tions qu'on pourra supposer ramené à la forme canonique

$$(189)\qquad \frac{\partial g(x, u_1, y_1, \dots, y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \dots, y_m)}{\partial u_1}\frac{dy_\lambda}{dx}$$
$$= g_\lambda(x, y_1, \dots, y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \dots, y_m) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \nu-1, \nu+1, \dots, m),$$

et où u_1 est une solution de l'équation $g(x, u, y_1, \dots, y_m) = 0$, et $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\nu-1}$, $\eta_{\nu+1}; \dots, \eta_m$ formera une solution de ce système (189).

Réciproquement, si une partie des éléments d'une solution $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ de (184), soit $\eta_1, \dots, \eta_\nu$, forme une solution complète d'un système à ν équations différentielles

$$(190)\qquad \frac{\partial h(x, v_1, y_1, \dots, y_\nu)}{\partial v_1}\frac{dy_\mu}{dx} = h_\mu(x, v_1, y_1, \dots, y_\nu) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \dots, \nu),$$

où v_1 satisfait à l'équation $h(x, v_1, y_1, \dots, y_\nu) = 0$, appelons $\bar{t}_1$ et $\bar{v}_1$ les valeurs de t_1 et v_1 qui correspondent à la solution $\eta_1, \dots, \eta_m$, on tirera des équations (184) et (190) les relations

$$(191)\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial G(x, \bar{t}_1, \eta_1, \dots, \eta_m)}{\partial \bar{t}_1} h_\lambda(x, \bar{v}_1, \eta_1, \dots, \eta_\nu) = \dfrac{\partial h(x, \bar{v}_1, \eta_1, \dots, \eta_\nu)}{\partial \bar{v}_1} G_\lambda(x, \bar{t}_1, \eta_1, \dots, \eta_m) \\ \qquad\qquad (\lambda = 1, 2, 3, \dots, \nu).\end{array}\right.$$

Il y aura donc des relations algébriques entre les éléments de la solution $\eta_1, \dots, \eta_m$, à la condition que les équations (191) ne soient pas toutes identiques, c'est-à-dire que les ν premières équations du système (184) ne renferment que $y_1, \dots, y_\nu$; alors elles formeraient elles-mêmes un système différentiel à ν équations. Écartons ce dernier cas, et éliminons de l'une des équations (174), de l'équation $G = 0$ et de l'une des relations

$$\frac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots, y_m)}{\partial t_1} h_\alpha(x, v_1, y_1, \dots, y_m) = \frac{\partial h}{\partial v_1} G_\alpha,$$

la quantité y_m; nous aurons un système différentiel à $m-1$ équations, admettant la solution $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1}$ et dont la partie $\eta_1, \dots, \eta_\nu$ forme encore une solution de (190). Opérons sur ce système à $m-1$ équations comme on a fait pour le système précédent, nous obtiendrons un système à $m-2$ équations, etc. et, finalement, nous aurons un système de ν équations de la forme

$$(192)\qquad \frac{\partial H(x_1, T_1, y_1, \dots, y_\nu)}{\partial T_1}\frac{dy_\lambda}{dx} = H_\lambda(x, T_1, y_1, \dots, y_\nu) \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, \nu),$$

où T_1 satisfait à la relation

$$(193)\qquad H(x, T_1, y_1, \dots, y_\nu) = 0.$$

Ce système admettant la solution $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$, commune avec le système (180), on tirera de (193) et (190)

$$(194)\qquad \frac{\partial \mathrm{H}(x, \overline{\mathrm{T}}_1, \eta_1, \ldots, \eta_\nu)}{\partial \overline{\mathrm{T}}_1} h_\alpha(x, \overline{v}_1, \eta_1, \ldots, \eta_\nu) = \frac{\partial h}{\partial \overline{v}_1} \mathrm{H}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où $\overline{\mathrm{T}}_1$ satisfait à la relation

$$(195)\qquad \mathrm{H}(x, \overline{\mathrm{T}}_1, \eta_1, \ldots, \eta_\nu) = 0.$$

Si les équations (195) n'étaient pas identiques en $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$, on pourrait encore diminuer d'une unité le nombre des équations du système (192), et alors une partie $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$ de la solution $\eta_1, \ldots, \eta_m$ du système (190) serait une solution d'un système à moins de ν équations; *mais nous supposerons qu'aucune partie de la solution $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$ de* (190) *ne forme une solution d'un système algébrique à moins de ν équations.* En conséquence, les équations (195) seront identiques, et, par suite, toutes les solutions de (190) formeront des parties des solutions de (184), et il est évident que l'identité des équations (195) subsiste quand, au lieu de $\overline{v}_1$, on y introduit une branche quelconque de la fonction implicite v_1 définie par l'équation $h(x, v_1, y_1, \ldots, y_m) = 0$, et que $\eta_1, \ldots, \eta_m$ est remplacé par $y_1, \ldots, y_m$. Il faudra supposer que $\overline{v}_1$ a suivi un chemin convenable pour arriver à l'une quelconque de ses branches.

De là une définition de l'irréductibilité.

Le système algébrique et différentiel de m équations est dit irréductible, *quand aucune combinaison de moins de m éléments de chacune de ses solutions ne forme une solution d'un système différentiel de moins de m équations. En d'autres termes, le système proposé ne fournit aucune solution à un système quelconque de moins de m équations, algébrique et de même forme.*

130. Revenons aux équations (184) du n° **127**, et appelons *degré du système* le degré en t de l'équation algébrique

$$\mathrm{G}(x, t, y_1, \ldots, y_m) = 0.$$

Nous allons montrer qu'un système irréductible de m équations et de degré n ne peut avoir aucune solution commune avec un système de m équations, mais de degré inférieur à n.

Mettons, en effet, ce deuxième système sous la forme canonique

$$(196)\qquad \frac{\partial g(x, \theta, y_1, \ldots, y_m)}{\partial \theta} \frac{dy_\lambda}{dx} = g_\lambda(x, \theta, y_1, \ldots, y_m)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

où θ est une racine de l'équation irréductible de degré $\nu < n$,

$$(197) \qquad g(x, \theta, y_1, \ldots, y_m) = 0,$$

et supposons que le système (175) et les équations (196) et (197) déterminent une solution commune $\eta_1, \ldots, \eta_m$. On aurait

$$(198) \qquad \frac{G_\alpha(x, T_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\frac{\partial G(x, T_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\partial T_1}} = \frac{g_\alpha(x, \Theta_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\frac{\partial g(x, \Theta_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\partial \Theta_1}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

où T_1 et Θ_1 représentent les valeurs de t_1 et θ_1 qui correspondent à la solution $\eta_1, \ldots, \eta_m$. D'après ce qui précède, puisqu'il ne peut y avoir de relation algébrique entre les éléments d'une solution d'un système irréductible, l'équation (188) ou encore l'équation

$$\frac{G_\alpha(x, t_1, y_1, \ldots, y_m)}{\frac{\partial G(x, t_1, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_1}} = \frac{g_\alpha(x, \theta_1, y_1, \ldots, y_m)}{\frac{\partial g(x, \theta_1, y_1, \ldots, y_m)}{\partial \theta_1}}$$

doit être identique en $y_1, \ldots, y_m$, et alors les deux systèmes d'équations (184) et (196) se confondent, puisque toutes les solutions leur sont communes.

Mettons l'équation (197) sous la forme

$$(199) \qquad \theta_1^\nu + \omega_1(x, y_1, \ldots, y_m)\theta_1^{\nu-1} + \ldots + \omega_\nu(x, y_1, \ldots, y_m) = 0,$$

où les ω sont des fonctions rationnelles, et remarquons que la réduction d'un système différentiel à la forme canonique peut toujours être conduite de sorte que t_1, qui est une fonction rationnelle de $x, y_1, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}$, soit encore, au moyen des équations (186) et (199), rendue fonction entière de θ_1 au degré $n - 1$, et à coefficients rationnels en $x, y_1, \ldots, y_m$. Alors on pourra poser

$$(200) \qquad t_1 = \Omega_0(x, y_1, \ldots, y_m) + \Omega_1(x, y_1, \ldots, y_m)\theta_1 + \ldots + \Omega_{\nu-1}(x, y_1, \ldots, y_m)\theta_1^{\nu-1}.$$

Alors, à cause de (189), ou encore en éliminant θ_1, on aura une équation du degré ν en t_1, et les coefficients seront rationnels en $x, y_1, \ldots, y_m$. Mais l'équation $G = 0$ étant irréductible, il est impossible de supposer que l'équation (187) définissant θ_1 soit d'un degré inférieur.

Comme corollaire, l'équation $G = 0$, irréductible en $t_1, x, y_1, \ldots, y_m$, est encore irréductible en $t_1, \eta_1, \ldots, \eta_m$. Car, s'il en était autrement, le système différentiel initial aurait une solution commune avec un système de degré moindre.

Enfin, il résulte de ce qui précède que, si l'on considère un système irréductible qui a une solution commune avec un système du même nombre d'équations ou d'un nombre plus grand, toutes ses solutions forment chacune toute une solution ou une partie d'une solution du second système.

131. La théorie générale d'intégration que nous avons exposée dans les Chapitres précédents n'ôte rien à l'importance de procédés particuliers d'intégration qui fournissent d'ailleurs de remarquables théorèmes.

Nous donnerons, pour terminer ce travail, quelques exemples de ces théories particulières.

Nous avons appelé *solution* du système

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

un ensemble de fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfaisant à ces équations. Nous appellerons, *par opposition, intégrale* du système (A) toute relation

$$\text{(201)} \qquad f(x, y_1, \ldots, y_n) = \text{const.},$$

qui est identiquement satisfaite en vertu des équations (A), c'est-à-dire par une solution arbitraire de ces équations.

Si l'on connaît un système fondamental de solutions y_{ij}, la solution générale des équations (A) est de la forme

$$\text{(202)} \qquad y_i = C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in},$$

et l'on peut résoudre ces équations par rapport aux constantes arbitraires. On obtiendra ainsi n intégrales linéaires distinctes

$$\text{(203)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}y_1 + \ldots + \alpha_{1n}y_n = C_1, \\ \alpha_{n1}y_1 + \ldots + \alpha_{nn}y_n = C_n, \end{array} \right.$$

où les α sont des fonctions connues des solutions données y_{ij}.

Réciproquement, si l'on connaît n intégrales distinctes, on obtiendra, en résolvant les équations (203), des équations de la forme

$$\text{(204)} \qquad y_i = C_1 A_{i1} + \ldots + C_n A_{in},$$

et, puisque les constantes sont indéterminées, on peut faire, par exemple, $C_2 = 0, \ldots, C_n = 0$, et l'on voit que A_{i1} sera une solution du système (A). On pourra donc mettre les équations (204) sous la forme (202).

Posé au point de vue de la recherche des *intégrales,* le problème de l'intégration du système (A) est donc différent de la théorie générale que nous avons ex-

posée. On comprend qu'il y ait une importance considérable à rechercher les formes les plus simples des intégrales.

Supposons, par exemple, avec M. Darboux, que les coefficients a des équations (A) soient *des fonctions rationnelles de x*. Il pourra exister des intégrales *non linéaires*, algébriques et rationnelles, tandis que les intégrales linéaires peuvent être irrationnelles ou même transcendantes. Il y a donc intérêt à chercher ces intégrales de degré supérieur. Nous allons montrer comment M. Darboux parvient à résoudre ce problème, et en même temps indiquer les beaux théorèmes qui se rattachent à la question.

Prenons d'abord un exemple. L'équation

$$2a\frac{d^2y}{dx^2} + a'\frac{dy}{dx} - 2y = 0,$$

où a' est la dérivée de a, admet les deux intégrales premières linéaires

$$e^{-\int\frac{dx}{\sqrt{a}}}\left(y - \sqrt{a}\frac{dy}{dx}\right) = C_1,$$

$$e^{+\int\frac{dx}{\sqrt{a}}}\left(y - \sqrt{a}\frac{dy}{dx}\right) = C_2,$$

et elles peuvent être irrationnelles ou transcendantes, tandis que l'intégrale du second degré

$$y^2 - a\frac{dy^2}{dx^2} = C_1 C_2$$

est algébrique et rationnelle quand a est rationnel.

Considérons une intégrale rationnelle de degré quelconque

$$(205) \qquad f(x, y_1, \ldots, y_n) = C,$$

elle doit satisfaire identiquement à l'équation aux dérivées partielles

$$(206) \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_1}(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n}(a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n).$$

On voit ainsi que, si la fonction f n'est pas homogène, en la décomposant en parties homogènes en $y_1, \ldots, y_n$, chaque partie égalée séparément à une constante donnera une intégrale du système (A). En effet, soit

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_k,$$

on aura identiquement

$$(207) \qquad \sum\frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum\frac{\partial f_i}{\partial y_1}(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n)\ldots + \sum\frac{\partial f_i}{\partial y_n}(a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n) = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Changeons y en λy, et nous aurons

$$(208)\quad \begin{cases} f_i(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n) = \lambda^{\mu_i} f_i(y_1, \ldots, y_n), \\ \dfrac{\partial f_i(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n)}{\partial x} = \lambda^{\mu_i} \dfrac{\partial f_i(y_1, \ldots, y_n)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial f_i(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n)}{\partial (\lambda y)} = \lambda^{\mu_i - 1} \dfrac{\partial f_i(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y}, \end{cases}$$

et aussi

$$(209)\quad \sum \lambda^{\mu_i} \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum \lambda^{\mu_i} \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(a_{11} y_1 + \ldots + a_{n1} y_n) + \ldots + \sum \lambda^{\mu_i} \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(\ldots) = 0,$$

et, λ étant absolument arbitraire, il faut que l'on ait séparément

$$(210)\quad \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(a_{11} y_1 + \ldots + a_{n1} y_n) + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} y_n) = 0.$$

Nous pourrons donc supposer que, dans l'équation (205), f est homogène en $y_1, \ldots, y_n$.

Cela posé, soit y_{ij} un système fondamental de solutions et soit

$$(211)\quad y_i = C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in}$$

la solution générale.

On peut supposer ces valeurs y_i portées dans $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ et f devra rester constant après la substitution (211).

Tout covariant F de f, multiplié par une puissance convenable (négative) du déterminant de la substitution (211), se transforme dans le covariant analogue formé avec la fonction $\varphi(C_1, C_2, \ldots, C_n)$, où $\varphi(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est la fonction *indépendante de* x qui résulte de la substitution (211) faite dans $f(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Mais ce nouveau covariant étant exprimé au moyen des constantes $C_1, \ldots, C_n$ prises comme nouvelles variables, est indépendant de x, c'est-à-dire est une constante par rapport à x. *Donc enfin tout covariant de l'intégrale f, multiplié par une puissance convenable d'une fonction connue de* x, *est également une intégrale.*

La proposition s'étend au cas où l'on a plusieurs intégrales, et où l'on considère un covariant quelconque du système de ces formes.

En effet, soient

$$\begin{gathered} f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_k(x, y_1, \ldots, y_n) \end{gathered}$$

k formes intégrales homogènes qui deviennent par la substitution (201) $\varphi_i(C_1, \ldots, C_n)$, c'est-à-dire des constantes.

Remplaçons les variables $y_1, \ldots, y_n$ par les variables $C_1, \ldots, C_n$ au moyen

de la substitution (211). Nous aurons d'abord

$$f_i(x, C_1y_{11} + \ldots + C_ny_{1n}, \ldots) = \varphi_i(C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Ensuite le covariant F de $f_1, f_2, \ldots, f_k$ est une expression $F(f_1, \ldots, f_k)$ qui se reproduit après la substitution (201), mais multipliée par une puissance δ^n du déterminant de la substitution.

On aura donc, par suite du changement de variables (211),

$$F(f_1, \ldots, f_k) = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\delta^n.$$

Or δ ne dépend que de x. On voit donc, en revenant aux anciennes variables, que

$$F(f_1, \ldots, f_k) \times \delta^{-n}$$

est une constante, c'est-à-dire une intégrale.

Ce beau théorème s'applique, avec des modifications convenables, aux contre-variants de $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, comme nous allons le montrer.

Introduisons pour cela le système auxiliaire

$$\frac{dz_i}{dx} = -a_{1i}z_1 - a_{2i}z_2 - \ldots - a_{ni}z_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{212}$$

Le système (212) est dit *réciproque du système* (A). Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et $z_1, \ldots, z_n$ deux solutions quelconques appartenant respectivement au système (A) et à son réciproque (212), on aura

$$y_1z_1 + y_2z_2 + \ldots + y_nz_n = \text{const.}$$

En effet, en dérivant, on trouve

$$z_1\frac{dy_1}{dx} + \ldots + z_n\frac{dy_n}{dx} + y_1\frac{dz_1}{dx} + \ldots + y_n\frac{dz_n}{dx} = 0,$$

et, si l'on remplace les dérivées par leurs valeurs tirées de (A) et (212), on trouve une identité.

Il résulte de là que, pour intégrer le système (A), on n'augmente pas la difficulté en considérant l'ensemble des systèmes (A) et (212). On aura, en effet, à résoudre en plus un système algébrique de la forme

$$y_{1i}z_1 + \ldots + y_{ni}z_n = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour connaître la solution générale de (212) quand on aura déjà un système fondamental de solutions de (A).

Or, si l'on pose

$$H = \sum\sum a_{ik} z_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

l'ensemble des systèmes (A) et (202) revient à écrire le *système canonique, dans le sens classique du mot,*

$$(213) \qquad \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial z_i}, \qquad \frac{dz_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Alors, soient

$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n \mid z_1, z_2, \ldots, z_n) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

k intégrales homogènes en $y_1, \ldots, y_n$ et en $z_1, \ldots, z_n$.

Toute forme invariante de ce système d'intégrales, multipliée par une fonction connue de x, est encore une intégrale du système canonique.

En effet, la solution générale de (A) est

$$(214) \qquad y_i = C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in},$$

et les intégrales de (203) sont

$$(215) \qquad y_{1i} z_1 + \ldots + y_{ni} z_n = \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

car les équations (204) et (205) donnent

$$y_1 z_1 + \ldots + y_n z_n = C_1 \gamma_1 + \ldots + C_n \gamma_n = \text{const.}$$

Alors, si dans les intégrales on remplace $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$ par leurs valeurs tirées de (204) et (215), elles doivent se transformer en des fonctions

$$\varphi_i[C_1, \ldots, C_n \mid \gamma_1, \ldots, \gamma_n] \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

indépendantes de x. Mais (214) et (215) sont des substitutions linéaires qui changent les variables y et z dans les variables C et γ. Donc toute forme invariante du système des intégrales f se réduira, quand on la multipliera par une puissance convenable du déterminant de la substitution (214), à la fonction analytique formée avec les fonctions φ_i, c'est-à-dire à une fonction des constantes C et γ. Or, une telle fonction est encore une intégrale.

Le déterminant de la substitution est égal, comme on l'a vu au Chapitre I, à $e^{-\int \Sigma a_{ii} dx}$. Enfin, remarquons que le dernier théorème démontré comprend la fameuse proposition de Poisson dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

132. Donnons enfin, d'après M. Appell, les principes essentiels de la théorie des

fonctions invariantes des intégrales des systèmes quelconques de la forme (A)

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n.$$

M. Appell donne, dans un sens très général, le nom de *fonction invariante* de np quantités X_{ik} à chaque fonction algébrique entière des variables qui se reproduit multipliée par une puissance de la substitution quand on fait sur les variables une substitution linéaire telle que

$$X_{ik} = C_{i1}Y_{1k} + \ldots + C_{in}Y_{nk}.$$

Une pareille fonction peut être représentée par le Tableau

$$\begin{Bmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{1n} & \ldots & X_{np} \end{Bmatrix}$$

ou par la notation $I\begin{vmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ X_{n1} & \ldots & X_{np} \end{vmatrix}$,

ou par la notation simplifiée $I(X_{ik})_{np}$.

M. Appell démontre les théorèmes généraux suivants :

I. Si l'on a l'identité

$$I(X_{ik})_{np} = D^m I(Y_{ik})_{np},$$

D étant le déterminant de la substitution ; la fonction invariante est homogène et de degré m par rapport aux variables d'une même ligne.

II. On a identiquement

$$I(X_{ik})_{np} = 0 \quad \text{si} \quad p < n.$$

III. Si $p = n$, une fonction invariante est, à un facteur près indépendant des variables X, une puissance du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{n1} & \ldots & X_{nn} \end{vmatrix}.$$

IV. Toute fonction invariante est une fonction entière et homogène de degré n des $n(p-n)+1$ déterminants Δ, Δ_{ip}, $\Delta_{i,n+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ où l'on a posé d'une manière générale (en supposant $p > n$)

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1,i-1} & X_{1k} & X_{1,i+1} & \ldots & X_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ X_{n1} & \ldots & X_{n,i-1} & X_{nk} & X_{n,i+1} & \ldots & X_{nn} \end{vmatrix}.$$

On pourrait appliquer ces théorèmes à l'étude des systèmes différentiels (A). Mais, comme le fait M. Appell lui-même, on peut faire de ces systèmes une étude directe et d'ailleurs très simple; nous allons le faire voir.

Toute fonction algébrique entière F *des éléments des solutions d'un système fondamental* y_{ik} *des équations* (A)

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n$$

et des dérivées de ces éléments, qui se reproduit multipliée par un facteur constant différent de zéro quand on remplace le système fondamental de solutions par un autre système fondamental, est égale à une fonction algébrique entière des coefficients a et de leurs dérivées multipliée par une puissance de l'expression $e^{\int(a_{11}+\ldots+a_{nn})dx}$.

D'abord F doit se reproduire à un facteur constant près quand on permute entre elles les solutions y_{ik}. En effet, on peut remplacer les deux solutions y_{i1} et y_{i2} par les deux solutions $a_1 y_{i1} + b_1 y_{i2}$ et $a_2 y_{i1} + b_2 y_{i2}$, pourvu que le déterminant $a_1 b_2 - b_1 a_2$ soit différent de zéro. On prendra $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $a_2 = 1$, $b_1 = 1$ et l'on aura permuté les deux solutions y_{i1} et y_{i2}. Alors, les deux fonctions entières $F(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in})$, $F(y_{i2}, y_{i1}, \ldots, y_{in})$ ne différant que par un facteur constant, il faut qu'on trouve dans chacune la solution y_{i1} avec les dérivées de ses éléments jusqu'à un même ordre de dérivation.

Donc, F *contient les dérivées des éléments des solutions* y_{ik} *jusqu'à un ordre de dérivation indépendant de l'indice k.*

F est une *fonction invariante* des quantités formant le Tableau

$$\begin{array}{ccc}
y_{11}, & \ldots, & y_{1n}, \\
\dfrac{dy_{11}}{dx}, & \ldots, & \dfrac{dy_{1n}}{dx}, \\
\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
\dfrac{d^p y_{11}}{dx^p}, & \ldots, & \dfrac{d^p y_{1n}}{dx^p}, \\
\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
y_{n1}, & \ldots, & y_{nn}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\dfrac{d^p y_{n1}}{dx^p}, & \ldots, & \dfrac{d^p y_{nn}}{dx^p},
\end{array}$$

et au nombre de $n^2(p+1)$. En effet, supposons qu'on passe du système fonda-

mental de solutions y_{ik} à un autre système fondamental quelconque

$$Y_{ik} = C_{1l}y_{i1} + \ldots + C_{nl}y_{in}.$$

Il faudra que l'on ait identiquement

$$F\left(y_{11}, \ldots, y_{1n}, \ldots, \frac{d^p y_{1n}}{dx^p}, \ldots, \frac{d^p y_{nn}}{dx^p}\right) = H\,F\left(Y_{11}, \ldots, Y_{1n}, \ldots, \frac{d^p Y_{1n}}{dx^p}, \ldots, \frac{d^p Y_{nn}}{dx^p}\right),$$

H étant une fonction des seuls coefficients C de la substitution. D'ailleurs ce facteur H est différent de zéro tant que le nouveau système Y_{ik} est fondamental, c'est-à-dire tant que le déterminant des constantes C est différent de zéro. Donc H ne peut différer que par un facteur numérique k d'une puissance de D et l'on a

$$H = k D^m.$$

On peut supposer $Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n$ pour calculer k, et le calcul donne immédiatement $k = 1$.

La fonction F se reproduit donc multipliée par D^m quand on fait sur les variables y_{ik} la substitution indiquée. Donc F est une fonction invariante des $n^2(p+1)$ quantités du Tableau ci-dessus. Or, en vertu des équations proposées (A) et des équations dérivées qui ont même forme que les équations (A) elles-mêmes, on peut éliminer dans F *toutes les dérivées*, et alors F étant une fonction algébrique des seuls éléments du déterminant

$$D = |y_{ik}|,$$

et ne s'annulant qu'avec lui, est précisément une puissance de ce déterminant, multipliée par un facteur qui ne peut être que zéro ou une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées. Ce résultat est conforme aux théorèmes généraux.

Pour les systèmes de la forme (A), le nombre des applications semble restreint. Mais, pour le cas particulier d'une équation linéaire d'ordre n, on peut tirer de là les théories de l'élimination et de la transformation des équations différentielles, comme en Algèbre pour les équations de degré n. Nous renverrons pour ces questions au Mémoire de M. Appell.

NOTE SUR LES DÉTERMINANTS.

133. Considérons un déterminant quelconque P dont les éléments sont représentés par la notation a_{rs}. Nous aurons les relations

$$(1)\quad \begin{cases} a_{1s}\dfrac{\partial P}{\partial a_{1s}}+\ldots+a_{ns}\dfrac{\partial P}{\partial a_{ns}}=P, \\ a_{r1}\dfrac{\partial P}{\partial a_{r1}}+\ldots+a_{rn}\dfrac{\partial P}{\partial a_{rn}}=P, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} a_{1r}\dfrac{\partial P}{\partial a_{1s}}+\ldots+a_{nr}\dfrac{\partial P}{\partial a_{ns}}=0, \\ a_{r1}\dfrac{\partial P}{\partial a_{s1}}+\ldots+a_{rn}\dfrac{\partial P}{\partial a_{sn}}=0, \end{cases}$$

$$(3)\quad \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\,\partial a_{r's}}=0,\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\,\partial a_{rs'}}=0,$$

$$(4)\quad \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\,\partial a_{r's'}}=-\frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs'}\,\partial a_{r's}}.$$

Le déterminant $\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\,\partial a_{r's'}}$ de l'ordre $n-2$ se déduit, au signe près, du déterminant P en effaçant dans ce dernier deux lignes, la $r^{\text{ième}}$ et la $r'^{\text{ième}}$ et deux colonnes, la $s^{\text{ième}}$ et la $s'^{\text{ième}}$. Mais on peut aussi considérer les expressions $\dfrac{\partial P}{\partial a_{rs}}$ comme des déterminants principaux, et l'on obtient les formules suivantes, analogues aux formules (1),

$$(5)\quad \begin{cases} a_{s1}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{r1}\,\partial a_{s1}}+\ldots+a_{sn}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{r1}\,\partial a_{sn}}=\dfrac{\partial P}{\partial a_{r1}}, \\ a_{s1}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{r2}\,\partial a_{s1}}+\ldots+a_{sn}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{r2}\,\partial a_{sn}}=\dfrac{\partial P}{\partial a_{r2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{s1}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{rn}\,\partial a_{s1}}+\ldots+a_{sn}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{rn}\,\partial a_{sn}}=\dfrac{\partial P}{\partial a_{rn}}. \end{cases}$$

Portons ces valeurs dans la seconde relation (1) et tenons compte des équations (3) et (4), nous aurons

$$(6)\quad P=\begin{vmatrix} a_{r1} & a_{s1} \\ a_{r2} & a_{s2}\end{vmatrix}\frac{\partial^2 P}{\partial a_{r1}\,\partial a_{s2}}+\ldots+\begin{vmatrix} a_{r,n-1} & a_{s,n-1} \\ a_{rn} & a_{sn}\end{vmatrix}\frac{\partial^2 P}{\partial a_{r,n-1}\,\partial a_{sn}},$$

ou encore

$$(7)\qquad P = \sum_u \sum_v \begin{vmatrix} a_{ru} & a_{su} \\ a_{rv} & a_{sv} \end{vmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial a_{ru}\, \partial a_{sv}}.$$

L'équation (7) correspond à la règle de Laplace quand on développe le déterminant P par rapport aux éléments de deux colonnes à la fois.

134. Il est facile de démontrer cette règle en général. On peut d'abord faire des calculs analogues aux précédents, mais on peut aussi faire une démonstration générale comme nous allons l'indiquer.

Rappelons d'abord que, pour former les permutations des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ donnés, on peut considérer d'abord p désignées de ces lettres $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ par exemple, et permuter d'abord ces lettres. Puis, considérant les $n-p$ autres lettres, on les permutera. On obtiendra ainsi $\varpi_p \varpi_{n-p}$ permutations, ϖ_k étant en général le nombre des permutations de k lettres. En appelant C_n^p le nombre des combinaisons de n objets p à p, on aura C_n^p manières de faire l'opération précédente; on aura donc

$$\varpi_n = C_n^p \varpi_p \varpi_{n-p},$$

parce que toutes les permutations de n lettres ont été comptées ainsi chacune une fois et une fois seulement comme il est facile de s'en assurer.

Toutes les permutations *d'un même groupe* sont caractérisées par ce fait que les p premières lettres sont les mêmes.

Cela posé, considérons un déterminant dont un terme quelconque ait la forme

$$\varepsilon a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant une permutation des seconds indices, et ε donnant le signe correspondant à cette permutation. Dans tous les termes, on peut supposer que *les p premiers seconds indices* sont toujours $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ *rangés dans un ordre quelconque*. Donc, pour obtenir tous les termes, on pourra les déduire de la permutation

$$\alpha_1 \ldots \alpha_p, \qquad \alpha_{p+1} \ldots \alpha_n,$$

en permutant d'abord les premiers indices, puis les $n-p$ derniers. On obtiendra ainsi successivement les termes

$$\varepsilon a_{p+1,\alpha_{p+1}} \ldots a_{n,\alpha_n} \left[\sum \pm a_{1\alpha_1} \ldots a_{p,\alpha_p} \right],$$

ou

$$\varepsilon \left[\sum a_{1\alpha_1} \ldots a_{p\alpha_p} \right] a_{p+1,\alpha p+1} \ldots a_{n,\alpha_n},$$

et ensuite les termes

$$\varepsilon\left[\sum a_{1\alpha_1}\ldots a_{p,\alpha_p}\right]\left[\sum a_{p+1,\alpha_{p+1}}\ldots a_{n\alpha_n}\right],$$

le signe ε résultant toujours de la permutation $\alpha_1\ldots\alpha_p \mid \alpha_{p+1}\ldots\alpha_n$, considérée comme résultant maintenant des deux permutations $\alpha_1\ldots\alpha_p$ et $\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n$.

La conclusion à tirer de là est la règle de Laplace, qui consiste à prendre, par exemple, p lignes, à en tirer tous les déterminants possibles à p^2 éléments, et à multiplier ces déterminants partiels par les déterminants complémentaires, c'est-à-dire par ceux qu'on obtient en effaçant, dans le déterminant principal, les lignes et les colonnes qui ont déjà servi. Les signes doivent concorder dans le développement ordinaire du déterminant principal, et dans le développement par la règle de Laplace.

135. Dans les formules (1) et (2), chaque dérivée partielle $\frac{\partial P}{\partial a_{rs}}$ est, au signe près, le déterminant qu'on obtient en supprimant la ligne r et la colonne s dans le déterminant principal P. En général, on appelle *mineurs d'ordre m* les déterminants qu'on obtient en supprimant m lignes et m colonnes quelconques dans le déterminant principal. Soit

$$c = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1, 2, \ldots, m} \tag{8}$$

le nombre des combinaisons de n objets m à m. Écrivons ces combinaisons les unes à la suite des autres dans un ordre choisi, et numérotons-les de sorte que les numéros $1, 2, \ldots, c$ caractérisent les diverses combinaisons. Soient γ et δ deux quelconques de ces numéros. Si dans le déterminant P on supprime tous les éléments qui ont leur premier indice dans la combinaison γ, et leur second indice dans la combinaison δ, les éléments restants formeront un mineur quelconque d'ordre m. Nous le représenterons par la notation $P_{\gamma\delta}^{(m)}$. Le nombre de ces mineurs est évidemment égal à c^2, et avec eux on peut former le déterminant

$$S_c^{(m)} = \begin{vmatrix} P_{11}^{(m)} & \ldots & P_{1c}^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{c1}^{(m)} & \ldots & P_{cc}^{(m)} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

On a pour les mineurs du premier ordre les plus simples combinaisons. Par exemple, la notation $P_{rs}^{(1)}$ indiquera qu'on a supprimé la ligne r et la colonne s. *Le déterminant* $S_n^{(1)}$ *est dit alors le déterminant adjoint du déterminant* P.

Si, dans le déterminant P, on supprime les lignes et les colonnes qui servent à former $P_{\gamma\delta}^{(m)}$, il restera un déterminant d'ordre $n-m$ qu'on peut représenter par le symbole

$$P_{-\gamma,-\delta}^{(n-m)}.$$

et qu'on appelle *complémentaire* par rapport au mineur $P_{\gamma\delta}^{(m)}$. De même, le déterminant $S_c^{(n-m)}$ formé avec les $P_{-\gamma,-\delta}^{(n-m)}$ est dit *complémentaire du déterminant* $S_c^{(m)}$. En particulier, les mineurs complémentaires des $P_{rs}^{(1)}$ sont les éléments eux-mêmes du déterminant P.

Choisissons les seconds indices dans la combinaison δ formée de m lettres, alors la règle de Laplace aura pour traduction algébrique la formule

$$P = P_{1\delta}^{(m)} P_{-1,-\delta}^{(n-m)} + P_{2\delta}^{(m)} P_{-2,-\delta}^{(n-m)} + \ldots + P_{c\delta}^{(m)} P_{-c,-\delta}^{(n-m)}. \tag{10}$$

Si, dans cette formule, on remplace δ par δ', on introduira nécessairement des lettres qui appartiennent à la combinaison complémentaire $-\delta$. Alors le déterminant P pourra être remplacé par un autre déterminant où des colonnes seraient identiques. La formule (10) entraîne donc la formule

$$0 = P_{1\delta'}^{(m)} P_{-1,-\delta'}^{(n-m)} + \ldots + P_{c\delta'}^{(m)} P_{-c,-\delta'}^{(n-m)}. \tag{11}$$

136. Comme applications des formules (10) et (11), formons des produits de déterminants où les indices (m) et $(n-m)$ seront supprimés pour la commodité de l'écriture. Nous aurons, comme première application, la formule

$$\begin{vmatrix} P_{11} & \ldots & P_{1c} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{c1} & \ldots & P_{cc} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} P_{-1,-1} & P_{-1,-2} & \ldots & P_{-1,-s} & \ldots & P_{-1,-c} \\ P_{-2,-2} & P_{-2,-2} & \ldots & P_{-2,-s} & \ldots & P_{-c,-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & 0 & \ldots & P_{1s} & \ldots & P_{1c} \\ 0 & P & \ldots & P_{2s} & \ldots & P_{2c} \\ . & .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & P_{ss} & \ldots & P_{sc} \\ . & .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & P_{cs} & \ldots & P_{cc} \end{vmatrix}.$$

En particulier, pour $m = n-1$ et $s = n-2$, on a, en changeant les indices $n-1$ et n en 1 et 2,

$$\frac{\partial P}{\partial a_{11}} \frac{\partial P}{\partial a_{22}} - \frac{\partial P}{\partial a_{12}} \frac{\partial P}{\partial a_{21}} = P \frac{\partial^2 P}{\partial a_{11}\, \partial a_{22}},$$

et, d'une manière semblable mais générale,

$$\frac{\partial P}{\partial a_{rs}} \frac{\partial P}{\partial a_{r's'}} - \frac{\partial P}{\partial a_{rs'}} \frac{\partial P}{\partial a_{r's}} = P \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\, \partial a_{r's'}}. \tag{12}$$

137. Comme seconde application on a, de la même manière, la formule

$$S_c^{(m)} S_c^{(n-m)} = P^c, \tag{13}$$

d'où, en particulier,

$$S_n^{(1)} = P^{n-1}. \tag{14}$$

Cette dernière formule donne la valeur du déterminant adjoint en fonction de celle du déterminant proposé.

138. Arrivons à la formule de Cauchy,

$$R_{\gamma\delta}^{(m)} = P_{\gamma 1}^{(m)} Q_{\delta 1}^{(m)} + \ldots + P_{\gamma c}^{(m)} Q_{\delta c}^{(m)}. \tag{15}$$

Commençons par définir le produit R des deux déterminants P et Q du même ordre. On aura, par définition,

$$r_{\mu\nu} = p_{\mu 1} q_{\nu 1} + \ldots + p_{\mu n} q_{\nu n}, \tag{16}$$

en appelant p, q, r les termes des trois déterminants; on peut écrire simplement

$$r_{\mu\nu} = S^n(p_{\mu 1}, q_{\nu 1}), \tag{17}$$

le signe de sommation S étant relatif aux seconds indices 1. On aura, par suite,

$$R = \begin{vmatrix} S^n(p_{11}q_{11}) & S^n(p_{11}q_{21}) & \ldots & S^n(p_{11}q_{n1}) \\ S^n(p_{21}q_{11}) & S^n(p_{21}q_{21}) & \ldots & S^n(p_{21}q_{n1}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ S^n(p_{n1}q_{11}) & S^n(p_{n1}q_{21}) & \ldots & S^n(p_{n1}q_{n1}) \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Supposons que dans R on échange deux lignes, par exemple les deux premières. On aura l'échange entre les deux éléments

$$S^n(p_{11}q_{i1}) \quad \text{et} \quad S^u(p_{21}q_{i1}).$$

Rien n'est donc changé dans le déterminant Q. Au contraire, dans P, la suite

$$p_{11}, \; p_{12}, \; \ldots, \; p_{1n}$$

est remplacée par

$$p_{21}, \; p_{22}, \; \ldots, \; p_{2n},$$

et inversement. On a donc échangé au fond les deux premières lignes de P.

D'une manière générale, on peut dire que, si l'on échange les lignes d'indice i et j dans l'un des deux déterminants P et R, le même échange doit être fait dans l'autre déterminant pour que la loi

$$R = PQ$$

subsiste. Si, au lieu des lignes, on considère les colonnes, alors R et Q seront associés dans l'ordre de ces colonnes.

Cela posé, considérons un mineur quelconque $R_{\gamma\delta}^{(m)}$ de R. Amenons les lignes et les colonnes qui correspondent aux combinaisons γ et δ dans les premiers

rang. La même opération devra être faite sur les lignes de P et les colonnes de Q, et l'on aura toujours

$$R = PQ.$$

Il suffira donc de démontrer la formule de Cauchy dans le cas particulier représenté par la formule suivante :

$$(1) \qquad R_{11}^{(m)} = P_{11}^{(m)}Q_{11}^{(m)} + \ldots + P_{1c}^{(m)}Q_{1c}^{(m)}.$$

Considérons un terme quelconque de $R_{11}^{(m)}$. Il est dérivé du terme principal

$$r_{11}r_{22}\ldots r_{mm}$$

par des permutations effectuées sur les seconds indices. Il sera donc de la forme

$$\pm r_{1\alpha_1}\ldots r_{m\alpha_m},$$

ou encore de la forme

$$\pm S(p_{1i}q_{\alpha_1 i})\,S(p_{2i}q_{\alpha_2 i})\ldots S(p_{mi}q_{\alpha_m i}).$$

Son développement renfermera donc toutes les combinaisons

$$(A) \qquad p_{1\beta_1}\ldots p_{m\beta_m}q_{\alpha_1\gamma_1}\ldots q_{\alpha_m\gamma_m},$$

où $\beta_1, \ldots, \beta_m$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sont des combinaisons quelconques de m des indices 1, 2, ..., n.

Cela posé, $R_{11}^{(m)}$ est un déterminant, c'est-à-dire une fonction qui change de signe quand on change la parité de l'une des suites des indices de ses termes. Il faut donc que toutes les combinaisons A soient précédées d'un signe conforme à la loi de leurs indices. Mais alors, en raisonnant comme pour la règle de Laplace, on pourra démontrer la formule

$$R_{11}^{(m)} = \Sigma \pm S(p_{1,\beta_1}\ldots p_{m,\beta_m})S(q_{\alpha_1,\gamma_1}\ldots q_{\alpha_m,\gamma_m}),$$

ou encore, en revenant aux notations adoptées,

$$R_{11}^{(m)} = P_{11}^{(m)}Q_{11}^{(m)} + \ldots + P_{1c}^{(m)}Q_{1c}^{(m)}.$$

130. Il nous reste à démontrer que le déterminant $S_c^{(m)}$ est une puissance de P. M. Francke l'a démontré d'abord par une méthode directe. Ensuite, M. Borchardt, dans une Note ajoutée au Mémoire de M. Francke, a obtenu d'une manière presque immédiate ce théorème important en s'appuyant sur la remarque suivante facile à démontrer : l'expression entière et rationnelle

$$(A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n)^k$$

n'a pour diviseurs entiers et rationnels que des expressions de la forme

$$\lambda(A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n)^\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, k);$$

or c'est le cas du déterminant P^k, où l'on peut appeler $x_1, \ldots, x_n$ les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne.

Cela posé, la relation

$$S_c^{(m)} S_c^{(n-m)} = P^c,$$

établie par Cauchy, montre que $S_c^{(m)}$ est un diviseur de P^c et, de plus, un diviseur entier et rationnel. Il faut donc que l'on ait

$$S_c^{(m)} = \lambda P^\mu.$$

On trouve facilement l'exposant μ et la constante $\lambda = 1$, en cherchant d'une part la dimension de $S_c^{(m)}$ par rapport à une lettre quelconque du déterminant P, et, d'autre part, en supposant P réduit à sa diagonale principale.

NOTE SUR LA RÈGLE DE LAGRANGE.

140. Soit la fraction rationnelle

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n \varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_n}{x-a} + \Psi(x).$$

où $\varphi(x)$ n'est plus divisible par $x - a$.

Posons $x = a + h$, nous aurons

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = A_1 + A_2 h + \ldots + A_n h^{n-1} + h^n \Psi(a+h).$$

D'un autre côté, nous aurons

$$\frac{f(a+h)}{(x-a-h)h^n \varphi(a+h)} = [A_1 + A_2 h + \ldots + A_n h^{n-1} + h^n \Psi(a+h)]$$
$$\times \frac{1}{h^n}\left[\frac{1}{x-a} + \frac{h}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(x-a)^n} + h^n \chi(a+h)\right].$$

Le coefficient de $\frac{1}{h}$, dans ce développement, est

$$\frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_n}{x-a},$$

c'est-à-dire la partie du développement de $\frac{f(x)}{(x-a)^n \varphi(x)}$, qui correspond à la racine a.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME NEUVIÈME.

FIN DU TOME NEUVIÈME.

21689 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.


STORAGE AREA

